# 线性代数
# 自测题第五章难点解答

宁　群

(宿州学院　数学与统计学院)

# 目录

# 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A, B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

# 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A, B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

## 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A,B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

理由：

# 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A,B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

理由：$A$经过初等行变换化为$B$，则$A$与$B$等价；

## 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A,B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

理由：$A$经过初等行变换化为$B$，则$A$与$B$等价；但等价矩阵未必经过初等行变换可以互化.

# 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A, B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

理由：$A$经过初等行变换化为$B$，则$A$与$B$等价；但等价矩阵未必经过初等行变换可以互化. 例如，

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$等价，但$A$经过初等行变换得不到$B$.

# 自测题第五章难点解答

1.原题：设$A,B$是两个同阶矩阵，则$A$经过初等行变换可以化为$B$是矩阵$A$与$B$等价的

解 充分但非必要条件

理由：$A$经过初等行变换化为$B$，则$A$与$B$等价；但等价矩阵未必经过初等行变换可以互化. 例如，$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$等价，但$A$经过初等行变换得不到$B$.

2.原题：设$A,P$均是3阶方阵，且$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列向量的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，$P^T$为$P$的转置矩阵，$P^{-1}$是$P$的逆矩阵，记$Q=(\eta_1+\eta_2\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，

## 自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$;

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$;

## 自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$;

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$;

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

## 自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

理由：

# 自测题第五章难点解答

(1)若$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^TAQ=$；

(2)若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

理由：因为$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以

# 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^TAP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T P^TAP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

# 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

$$(2)Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

$$(2)Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

$$(1)Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^T P^TAP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix};$$

$$(2)Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

# 自测题第五章难点解答

3.原题：

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$有特征向量$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

(1)则$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=$；(2)$\eta$对应的特征值$\lambda=$

## 自测题第五章难点解答

**3.原题：**

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$有特征向量$\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

(1)则$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$；(2)$\eta$对应的特征值$\lambda=$

**解** (1)$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1.$

## 自测题第五章难点解答

**3.原题：**

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$有特征向量$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

(1)则$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=$；(2)$\eta$对应的特征值$\lambda=$

**解** (1)$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1.$

**理由：**

## 自测题第五章难点解答

**3.原题：**

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$有特征向量$\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

(1)则$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$； (2)$\eta$对应的特征值$\lambda=$

**解** (1)$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$； (2)$\lambda=-1.$

**理由：** $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

# 自测题第五章难点解答

3.原题：

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$有特征向量$\eta=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，

(1)则$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=$；(2)$\eta$对应的特征值$\lambda=$

解 (1)$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 0\end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1.$

理由：$A\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

# 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a=-1$，$1+b=1$，$\lambda=-1$，

## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a=-1$，$1+b=1$，$\lambda=-1$，

所以 (1)$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1.$

## 自测题第五章难点解答

$$=\begin{pmatrix} -1 \\ 2+a \\ 1+b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a=-1$, $1+b=1$, $\lambda=-1$,

所以 (1)$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1.$

4.原题：设$A$为3阶方阵，且矩阵$A$对应特征值$2,-2,1$的特征向量分别是 $\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，则$A=$

# 自测题第五章难点解答

$$=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

比较两边，既得，$2+a=-1,\ 1+b=1,\ \lambda=-1$，

所以 (1)$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$；(2)$\lambda=-1$.

4.原题：设$A$为3阶方阵，且矩阵$A$对应特征值$2,-2,1$的特征向量分别是$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，则$A=$

解 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&1&1\\-4&0&2\end{pmatrix}$

# 自测题第五章难点解答

理由：

# 自测题第五章难点解答

理由：取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

# 自测题第五章难点解答

理由：取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

## 自测题第五章难点解答

理由：取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

**理由：** 取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&1&1\\-4&0&2\end{pmatrix}.$$

## 自测题第五章难点解答

理由：取$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&1&1\\-4&0&2\end{pmatrix}.$$

5.原题：设$A$是2阶方阵，$\eta_1,\eta_2$是线性无关的2维向量，且$A\eta_1=0$，

(1)若$A\eta_2=2\eta_1+\eta_2$，则矩阵$A$相似于；

(2)若$A\eta_2=2\eta_1+2\eta_2$，则矩阵$A$相似于

# 自测题第五章难点解答

解 $(1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## 自测题第五章难点解答

**解** (1)$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由:**

## 自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_2$都是非零向量，

# 自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1,\eta_2$线性无关，所以$2\eta_1+\eta_2,\eta_1+\eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1+\eta_2)$

## 自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1 + \eta_2) = 2A\eta_1 + A\eta_2 = 2\eta_1 + \eta_2$，所以$2\eta_1 + \eta_2$是属于特征值1的特征向量，

## 自测题第五章难点解答

**解** (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1+\eta_2)=2A\eta_1+A\eta_2=2\eta_1+\eta_2$，所以$2\eta_1+\eta_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

## 自测题第五章难点解答

**解** (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1 + \eta_2) = 2A\eta_1 + A\eta_2 = 2\eta_1 + \eta_2$，所以$2\eta_1 + \eta_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\eta_1 + \eta_2)$

# 自测题第五章难点解答

解 (1)$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1 + \eta_2) = 2A\eta_1 + A\eta_2 = 2\eta_1 + \eta_2$，所以$2\eta_1 + \eta_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\eta_1 + \eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = 2(\eta_1 + \eta_2)$，所以$\eta_1 + \eta_2$是属于特征值2的特征向量，

## 自测题第五章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1+\eta_2) = 2A\eta_1 + A\eta_2 = 2\eta_1+\eta_2$，所以$2\eta_1+\eta_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\eta_1+\eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = 2(\eta_1+\eta_2)$，所以$\eta_1+\eta_2$是属于特征值2的特征向量，即$A$有特征值0和2，相似于对角阵.

## 自测题第五章难点解答

**解** (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$\eta_1, \eta_2$线性无关，所以$2\eta_1+\eta_2, \eta_1+\eta_2$都是非零向量，

(1) $A(2\eta_1+\eta_2) = 2A\eta_1 + A\eta_2 = 2\eta_1+\eta_2$，所以$2\eta_1+\eta_2$是属于特征值1的特征向量，即$A$有特征值0和1，相似于对角阵.

(2) $A(\eta_1+\eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = 2(\eta_1+\eta_2)$，所以$\eta_1+\eta_2$是属于特征值2的特征向量，即$A$有特征值0和2，相似于对角阵.

**6.原题：** 设$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵$A$相似于$B$，$I$是3阶单位矩阵，则

(1)$A-I$的秩=；(2)$A+I$相似于

## 自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## 自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：

## 自测题第五章难点解答

解 (1)1； (2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：因为$A$与$B$相似，所以存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP = B$，

## 自测题第五章难点解答

**解** (1)1；(2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$A$与$B$相似，所以存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P=P^{-1}AP-P^{-1}IP=B-I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，

## 自测题第五章难点解答

**解** (1)1；(2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$A$与$B$相似，所以存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP = B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$r(B-I) = 1$，而相似矩阵有相同的秩，所以$r(A-I) = 2$；

## 自测题第五章难点解答

**解** (1)1；(2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$A$与$B$相似，所以存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP = B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$r(B-I) = 1$，而相似矩阵有相同的秩，所以$r(A-I) = 2$；

(2)$P^{-1}(A+I)P = P^{-1}AP + P^{-1}IP = B + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

## 自测题第五章难点解答

**解** (1)1；(2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$A$与$B$相似，所以存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP = B$，

(1)$P^{-1}(A-I)P = P^{-1}AP - P^{-1}IP = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$r(B-I)=1$，而相似矩阵有相同的秩，所以$r(A-I)=2$；

(2)$P^{-1}(A+I)P = P^{-1}AP + P^{-1}IP = B + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A+I$相似于$B+I$，$B+I$相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

# 自测题第五章难点解答

相似具有传递性，所以$A+I$相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

# 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

## 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

## 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：

## 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，

# 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$\eta_k^T\eta_l=0,k\neq l$.

# 自测题第五章难点解答

**7.原题：** 设$\eta_1, \eta_2, \eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1, 1, 2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1 = \eta_2^T\eta_2 = 2, \eta_3^T\eta_3 = 3$，记$P$是以$\eta_1, \eta_2, \eta_3$为列的矩阵，即，$P = (\eta_1 \ \ \eta_2 \ \ \eta_3)$，则$P^TAP =$

**解** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

**理由：** 因为$\eta_1, \eta_2, \eta_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$\eta_k^T\eta_l = 0, k \neq l$.

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix} A(\eta_1 \ \ \eta_2 \ \ \eta_3)$$

## 自测题第五章难点解答

7.原题：设$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是3阶实对称矩阵$A$分别属于特征值$-1,1,2$的特征向量，若$\eta_1^T\eta_1=\eta_2^T\eta_2=2,\eta_3^T\eta_3=3$，记$P$是以$\eta_1,\eta_2,\eta_3$为列的矩阵，即，$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$，则$P^TAP=$

解 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

理由：因为$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是实对称矩阵属于不同特征值的特征向量，所以它们是两两正交的，即，$\eta_k^T\eta_l=0,k\neq l$.

$$P^TAP=\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix} A(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)=\begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix}(A\eta_1\ \ A\eta_2\ \ A\eta_3)$$

## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 & \eta_2 & 2\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1^T\eta_1 & \eta_1^T\eta_2 & 2\eta_1^T\eta_3 \\ -\eta_2^T\eta_1 & \eta_2^T\eta_2 & 2\eta_2^T\eta_3 \\ -\eta_3^T\eta_1 & \eta_3^T\eta_2 & 2\eta_3^T\eta_3 \end{pmatrix}$$

# 自测题第五章难点解答

$$=\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \eta_2^T\\ \eta_3^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\eta_1 & \eta_2 & 2\eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\eta_1^T\eta_1 & \eta_1^T\eta_2 & 2\eta_1^T\eta_3\\ -\eta_2^T\eta_1 & \eta_2^T\eta_2 & 2\eta_2^T\eta_3\\ -\eta_3^T\eta_1 & \eta_3^T\eta_2 & 2\eta_3^T\eta_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 & \eta_2 & 2\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1^T\eta_1 & \eta_1^T\eta_2 & 2\eta_1^T\eta_3 \\ -\eta_2^T\eta_1 & \eta_2^T\eta_2 & 2\eta_2^T\eta_3 \\ -\eta_3^T\eta_1 & \eta_3^T\eta_2 & 2\eta_3^T\eta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.原题： 设$A$是一个方阵，若$A^2 = I$，则称$A$是对合矩阵.

(1)设$B$是一个实对合阵，则$B$是对称阵是$B$是正交阵的；

(2)设$B$是一个实对称阵，则$B$是对合阵是$B$是正交阵的；

(3)设$B$是一个正交矩阵，则$B$是对称阵是$B$是对合矩阵的；

## 自测题第五章难点解答

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \\ \eta_3^T \end{pmatrix} (-\eta_1 \quad \eta_2 \quad 2\eta_3) = \begin{pmatrix} -\eta_1^T\eta_1 & \eta_1^T\eta_2 & 2\eta_1^T\eta_3 \\ -\eta_2^T\eta_1 & \eta_2^T\eta_2 & 2\eta_2^T\eta_3 \\ -\eta_3^T\eta_1 & \eta_3^T\eta_2 & 2\eta_3^T\eta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8.原题： 设$A$是一个方阵，若$A^2 = I$，则称$A$是对合矩阵.

(1)设$B$是一个实对合阵，则$B$是对称阵是$B$是正交阵的；

(2)设$B$是一个实对称阵，则$B$是对合阵是$B$是正交阵的；

(3)设$B$是一个正交矩阵，则$B$是对称阵是$B$是对合矩阵的；

解 (1)充分必要条件；(2)充分必要条件；(3)充分必要条件.

# 自测题第五章难点解答

理由：

# 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2 = I$，

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

(2)$B$是实对称矩阵，$B^T=B$，

## 自测题第五章难点解答

**理由：**(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

(2)$B$是实对称矩阵，$B^T=B$，

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，所以$B$是正交阵；

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

(2)$B$是实对称矩阵，$B^T=B$，

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，所以$B$是正交阵；

若$B$是正交阵，则$BB^T=I$，从而$B^2=BB^T=I$，所以$B$是对合阵；

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

(2)$B$是实对称矩阵，$B^T=B$，

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，所以$B$是正交阵；

若$B$是正交阵，则$BB^T=I$，从而$B^2=BB^T=I$，所以$B$是对合阵；

(3)$B$是正交阵，$BB^T=I$，

## 自测题第五章难点解答

理由：(1)$B$是实对合矩阵，$B^2=I$，

若$B$是对称矩阵，则$B=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B$是正交阵；

若$B$是正交矩阵，则$B^{-1}=B^T$，从而$BB^T=B^2=I$，$B^T=B$，$B$是对称阵；

(2)$B$是实对称矩阵，$B^T=B$，

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，所以$B$是正交阵；

若$B$是正交阵，则$BB^T=I$，从而$B^2=BB^T=I$，所以$B$是对合阵；

(3)$B$是正交阵，$BB^T=I$，

若$B$是对称阵，则$B=B^T$，从而$B^2=BB^T=I$，所以$B$是对合阵；

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2 = I$，从而$BB^T = B^2 = I$，$B = B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2 + A = 0$，若矩阵$A$的秩$r(A) = 2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：

# 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P$

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP$

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

# 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

即，与矩阵$A$相似的矩阵$B$也满足$B^2+B=0$，

# 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

即，与矩阵$A$相似的矩阵$B$也满足$B^2+B=0$，再，相似矩阵有相同的秩，所以$B$的秩为2，

## 自测题第五章难点解答

若$B$是对合阵，则$B^2=I$，从而$BB^T=B^2=I$，$B=B^T$，所以$B$是对称阵.

9.原题：设$A$是3阶实对称矩阵，且满足$A^2+A=0$，若矩阵$A$的秩$r(A)=2$，则$A$相似于

解 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

理由：假设$A$与$B$相似，则存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$，从而$P^{-1}(A^2+A)P=P^{-1}(A^2)P+P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=B^2+B$，

即，与矩阵$A$相似的矩阵$B$也满足$B^2+B=0$，再，相似矩阵有相同的秩，所以$B$的秩为2，在所给的矩阵中，只有此矩阵满足秩为2，且$B^2+B=0$.

## 自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量$X_0$与$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$解向量的

## 自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量$X_0$与$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$解向量的

解 必要但非充分条件.

# 自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量$X_0$与$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：

## 自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量$X_0$与$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：向量$X_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$与向量$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$正交的充分必要条件是$X_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$是齐次方程$ax_1+bx_2+cx_3=0$的解.

# 自测题第五章难点解答

10.原题：3维实向量$X_0$与$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$正交是$X_0$为齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$解向量的

解 必要但非充分条件.

理由：向量$X_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$与向量$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$正交的充分必要条件是$X_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$是齐次方程$ax_1+bx_2+cx_3=0$的解.

所以$X_0$满足齐次线性方程组，一定与$\eta_1$正交，但与$\eta_1$正交，不一定满足方程组中第二个方程.

## 自测题第五章难点解答

11.原题：设3阶实对称矩阵$A$的秩$r(A)=2$，且满足

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}，若取C=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}，并作可逆$$

线性变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

则将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$化为标准形

## 自测题第五章难点解答

11.原题：设3阶实对称矩阵$A$的秩$r(A)=2$，且满足

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}，若取C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}，并作可逆$$

线性变换$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，

则将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$化为标准形

解 $-2y_1^2+2y_3^2$.

# 自测题第五章难点解答

理由：

# 自测题第五章难点解答

理由：因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

## 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以$A$有特征值$-1,1$，且属于它们的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

又因为$A$的秩$r(A)=2$，所以$A$有0特征值，

## 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以$A$有特征值$-1,1$，且属于它们的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

又因为$A$的秩$r(A)=2$，所以$A$有0特征值，而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，

## 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，所以

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以$A$有特征值$-1,1$，且属于它们的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

又因为$A$的秩$r(A)=2$，所以$A$有0特征值，而实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，

所以，

## 自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

# 自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

所以$AC = \left( A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

# 自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

所以$AC = \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

## 自测题第五章难点解答

属于特征值0的特征向量与$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$都正交，为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，

所以$AC = \left(A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

所以$C^TAC = \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

所以所化标准形为$-2y_1^2+2y_3^2$.

# 自测题第五章难点解答

12.原题：设3阶实对称矩阵$A$的各行元素之和均为3，

且$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的两个解

向量，取$C=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则$C^TAC=$

## 自测题第五章难点解答

12.原题：设3阶实对称矩阵$A$的各行元素之和均为3，

且$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的两个解

向量，取$C=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则$C^TAC=$

解 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

# 自测题第五章难点解答

理由：

# 自测题第五章难点解答

理由：因为$AX=0$有解$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，且属于0特征值有两个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2$，

# 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$AX=0$有解$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，且属于0特征值有两个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2$，又因为$A$的各行元素之和相等，为3，

# 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$AX=0$有解$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，且属于0特征值有两个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2$，又因为$A$的各行元素之和相等，为3，所以$A$有特征值3，且属于特征值3的特征向量为$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

## 自测题第五章难点解答

理由：因为$AX=0$有解$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，且属于0特征值有两个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2$，又因为$A$的各行元素之和相等，为3，所以$A$有特征值3，且属于特征值3的特征向量为$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，将特征向量正交化和单位化，得矩阵$A$属于特征值0的正交单位向量

$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\eta_3$单位化得$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,

## 自测题第五章难点解答

**理由：** 因为$AX=0$有解$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，所以矩阵$A$有0特征值，且属于0特征值有两个线性无关的特征向量$\eta_1,\eta_2$，又因为$A$的各行元素之和相等，为3，所以$A$有特征值3，且属于特征值3的特征向量为$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，将特征向量正交化和单位化，得矩阵$A$属于特征值0的正交单位向量

$\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\eta_3$单位化得$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},C^TAC=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

# *Thank you!*

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com