线性代数
自测题第二章难点解答

宁 群

(宿州学院 数学与统计学院)

目录

自测题第二章难点解答

1.原

题：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，则(1)$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$；(2)$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$

自测题第二章难点解答

1.原

题：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，则(1)$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$；(2)$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$

解 (1)1； (2)$-\frac{4}{3}$.

自测题第二章难点解答

1.原

题：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的

解，则(1)$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$；(2)$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$

解 (1)1； (2)$-\frac{4}{3}$.

理由：

自测题第二章难点解答

1.原

题：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，则(1)$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$；(2)$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$

解 (1)1； (2)$-\frac{4}{3}$.

理由：因为$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，

自测题第二章难点解答

1.原

题：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，则(1)$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$；(2)$a_{21}+a_{22}+a_{23}=$

解 (1)1； (2)$-\frac{4}{3}$.

理由：因为$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的两个不同的解，所以，

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases}$$

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases}$$

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=-\frac{4}{3}.$$

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=-\frac{4}{3}.$$

2.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，若$X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的一个解，$X_0^T$是$X_0$的转置，则$X_0^TAX_0=$

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=-\frac{4}{3}.$$

2.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，若$X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的一个解，$X_0^T$是$X_0$的转置，则$X_0^TAX_0=$

解 2

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=-\frac{4}{3}.$$

2.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，若$X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的一个解，$X_0^T$是$X_0$的转置，则$X_0^TAX_0=$

解 2

理由：

自测题第二章难点解答

$$(1)\begin{cases} a_{11}+2a_{12}+3a_{13}=3 \\ 5a_{11}+4a_{12}+3a_{13}=3 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=1;$$

$$(2)\begin{cases} a_{21}+2a_{22}+3a_{23}=-4 \\ 5a_{21}+4a_{22}+3a_{23}=-4 \end{cases} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=-\frac{4}{3}.$$

2.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，若$X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$是线性方程组$AX=b$的一个解，$X_0^T$是$X_0$的转置，则$X_0^TAX_0=$

解 2

理由：因为$AX_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

自测题第二章难点解答

所以$X_0^T A X_0 = X_0^T (A X_0) = (1 \ \ 1 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.$

自测题第二章难点解答

所以$X_0^T A X_0 = X_0^T (A X_0) = (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.$

3.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

若$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是线性方程组

$AX=b$的3个不同的解，则方程组的系数矩阵A的元素$a_{11}=$

自测题第二章难点解答

所以$X_0^T A X_0 = X_0^T (A X_0) = (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 2.$

3.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

若$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方程组 $AX=b$的3个不同的解，则方程组的系数矩阵A的元素$a_{11}=$

解 1

自测题第二章难点解答

理由：

自测题第二章难点解答

理由：因为$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方

程组 $AX=b$的3个不同的解，所以

自测题第二章难点解答

理由： 因为$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方程组 $AX=b$的3个不同的解，所以 $\begin{cases}a_{11}+a_{12}=1\\a_{12}+a_{13}=1\\a_{13}=1\end{cases}$

自测题第二章难点解答

理由： 因为$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方程组 $AX=b$的3个不同的解，所以$\begin{cases}a_{11}+a_{12}=1\\a_{12}+a_{13}=1\\a_{13}=1\end{cases}\Rightarrow a_{11}=1$

自测题第二章难点解答

理由：因为$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是线性方程组 $AX=b$的3个不同的解，所以$\begin{cases}a_{11}+a_{12}=1\\a_{12}+a_{13}=1\\a_{13}=1\end{cases}\Rightarrow a_{11}=1$

4.原题：设$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，

若$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$是线性方程组 $AX=b$的2个不同的解，

自测题第二章难点解答

记 $Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

自测题第二章难点解答

记 $Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3； (2)Y_2和Y_4.

自测题第二章难点解答

记 $Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3； (2)Y_2和Y_4.

理由：

自测题第二章难点解答

$$记\ Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\ Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\ Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix},\ Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3； (2)Y_2和Y_4.

理由：(1)因为$Y_1=2X_1$，$Y_3=X_1+X_2$，

自测题第二章难点解答

$$\text{记 } Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\ Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\ Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix},\ Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3； (2)Y_2和Y_4.

理由：(1)因为$Y_1=2X_1$，$Y_3=X_1+X_2$，而X_1，X_2是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1$的解，所以$2X_1$，$X_1+X_2$是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解；

自测题第二章难点解答

记 $Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3；(2)Y_2和Y_4.

理由：(1)因为$Y_1=2X_1$，$Y_3=X_1+X_2$，而X_1，X_2是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1$的解，所以$2X_1$，$X_1+X_2$是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解；

(2)因为$Y_2=X_1-X_2$，$Y_4=X_2-X_1$，

自测题第二章难点解答

记 $Y_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$，

则(1)一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解是；(2) 一定是方程$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解是.

解 (1)Y_1和Y_3； (2)Y_2和Y_4.

理由：(1)因为$Y_1=2X_1$，$Y_3=X_1+X_2$，而 X_1，X_2是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1$的解，所以 $2X_1$，X_1+X_2是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=2$的解；

(2)因为$Y_2=X_1-X_2$，$Y_4=X_2-X_1$，而 X_1，X_2是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1$的解，所以 X_1-x_2，X_2+X_1是$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$的解；

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

解 (1)$a=1$；(2)$a=1$.

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

解 (1)$a=1$；(2)$a=1$.

理由：

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

解 (1)$a=1$；(2)$a=1$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

解 (1)$a=1$；(2)$a=1$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-a)\text{倍加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

5.原题：设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a \\ ax_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{cases}$，利用增广矩阵对其实施高斯消元，化为阶梯形矩阵后，(1)其常数列出现了主元，则数a满足；(2)其主元个数为2，则数a满足.

解 (1)$a=1$；(2)$a=1$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-a)\text{倍加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

常数列有主元，主元个数为2，都有$a=1$，且此时方程组无解.

自测题第二章难点解答

6.原题：若线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)无解，则$a=$；(2)有无穷多解，则$a=$；(3)无解，则a满足

自测题第二章难点解答

6.原题：若线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)无解，则$a=$；(2)有无穷多解，则$a=$；(3)无解，则a满足

解 (1)$a=-1$；(2)$a=3$；(3)$a\neq 3$且$a\neq -1$.

自测题第二章难点解答

6.原题：若线性方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ (1)无解，则$a=$；(2)有无穷多解，则$a=$；(3)无解，则a满足

解 (1)$a=-1$；(2)$a=3$；(3)$a\neq 3$且$a\neq -1$.

理由：

自测题第二章难点解答

6.原题：若线性方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ (1)无解，则$a=$；(2)有无穷多解，则$a=$；(3)无解，则a满足

解 (1)$a=-1$；(2)$a=3$；(3)$a\neq 3$且$a\neq -1$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

6.原题：若线性方程组$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$ (1)无解，则$a=$；(2)有无穷多解，则$a=$；(3)无解，则a满足

解 (1)$a=-1$；(2)$a=3$；(3)$a\neq 3$且$a\neq -1$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 3\\ 1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-2)\text{倍加到第2行}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & a-2 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行}(a-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行}(a-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

(1)无解，则常数列有主元，$a=-1$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行}(a-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

(1)无解，则常数列有主元，$a=-1$；

(2)有无穷多解，则主元个数<3，且常数列无主元，$a=3$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行}(a-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

(1)无解，则常数列有主元，$a=-1$；

(2)有无穷多解，则主元个数<3，且常数列无主元，$a=3$；

(3)有唯一解，常数列五主元且主元个数$=3$，$a\neq 3$且$a\neq -1$.

自测题第二章难点解答

7.原题：若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

(1)没有非零解，则a满足；(2)有非零解，则a满足；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，则$a$满足.

自测题第二章难点解答

7.原题：若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

(1)没有非零解，则a满足；(2)有非零解，则a满足；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，则$a$满足.

解 (1)$a\neq 1$且$a\neq -2$; (2)$a=1$或者$a=-2$; (3)$a=-2$.

自测题第二章难点解答

7.原题：若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

(1)没有非零解，则a满足；(2)有非零解，则a满足；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，则$a$满足.

解 (1)$a\neq 1$且$a\neq -2$; (2)$a=1$或者$a=-2$; (3)$a=-2$.

理由：

自测题第二章难点解答

7.原题：若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

(1)没有非零解，则a满足；(2)有非零解，则a满足；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，则$a$满足.

解 (1)$a\neq 1$且$a\neq -2$; (2)$a=1$或者$a=-2$; (3)$a=-2$.

理由：方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

7.原题：若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$

(1)没有非零解，则a满足；(2)有非零解，则a满足；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，则$a$满足.

解 (1)$a\neq 1$且$a\neq -2$; (2)$a=1$或者$a=-2$; (3)$a=-2$.

理由：方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-a)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

(1)没有非零解，主元个数$=3$，$a-1\neq 0$且$2-a-a^2\neq 0$，$a\neq 1$且$a\neq -2$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

(1)没有非零解，主元个数$=3$，$a-1\neq 0$且$2-a-a^2\neq 0$，$a\neq 1$且$a\neq -2$；

(2)有非零解，主元个数<3，$a-1=0$且$2-a-a^2=0$，$a=1$或者$a=-2$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

(1)没有非零解，主元个数$=3$，$a-1\neq 0$且$2-a-a^2\neq 0$，$a\neq 1$且$a\neq -2$；

(2)有非零解，主元个数<3，$a-1=0$且$2-a-a^2=0$，$a=1$或者$a=-2$；

(3)有通解$\begin{cases} x_1=-(a+1)x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，有一个自由未知量，主元个数为2，则$a-1\neq 0$且$2-a-a^2=0$，$a=-2$.

自测题第二章难点解答

8.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(1)有解，则a, b满足；(2)无解，则a, b满足；(3)有解，则自由未知量的个数是.

自测题第二章难点解答

8.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(1)有解，则a, b满足；(2)无解，则a, b满足；(3)有解，则自由未知量的个数是.

解 (1)$a=1$, $b=-1$；(2)$a\neq 1$或者$b\neq -1$；(3)2

自测题第二章难点解答

8.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(1)有解，则a, b满足；(2)无解，则a, b满足；(3)有解，则自由未知量的个数是.

解 (1)$a=1$, $b=-1$；(2)$a\neq 1$或者$b\neq -1$；(3)2

理由：

自测题第二章难点解答

8.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(1)有解，则a, b满足；(2)无解，则a, b满足；(3)有解，则自由未知量的个数是.

解 (1)$a=1$, $b=-1$；(2)$a\neq 1$或者$b\neq -1$；(3)2

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 & 5 & b \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & b-2 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行}(3)\text{倍加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行}(3)\text{倍加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

(1)有解，常数列没主元，$a-1=0$且$b+1=0$，$a=1$，$b=-1$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&2\\0&1&-1&-1&1\\0&-1&1&1&a-2\\0&-3&3&3&b-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行}(3)\text{倍加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}}\begin{pmatrix}1&2&-2&2&2\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&0&a-1\\0&0&0&0&b+1\end{pmatrix}$$

(1)有解，常数列没主元，$a-1=0$且$b+1=0$，$a=1,\ b=-1$；

(2)无解，常数列有主元，$a-1\neq 0$或者$b+1\neq 0$， $a\neq 1$或者$b\neq -1$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行}(3)\text{倍加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

(1)有解，常数列没主元，$a-1=0$且$b+1=0$，$a=1$，$b=-1$；

(2)无解，常数列有主元，$a-1\neq 0$或者$b+1\neq 0$，$a\neq 1$或者$b\neq -1$；

(3)有解，主元个数为2，自由未知量个数为2.

自测题第二章难点解答

9.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$

(1)有唯一的公共解，则a满足；(2)没有公共解，则a满足.

自测题第二章难点解答

9.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$

(1)有唯一的公共解，则a满足；(2)没有公共解，则a满足.

解 (1)$a\neq 1$；(2)$a=1$.

自测题第二章难点解答

9.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$

(1)有唯一的公共解，则a满足；(2)没有公共解，则a满足.

解 (1)$a\neq 1$；(2)$a=1$.

理由：

自测题第二章难点解答

9.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$

(1)有唯一的公共解，则a满足；(2)没有公共解，则a满足.

解 (1)$a\neq 1$；(2)$a=1$.

理由：联立方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$，方程组的增

广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

9.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$

(1)有唯一的公共解，则a满足；(2)没有公共解，则a满足.

解 (1)$a\neq 1$；(2)$a=1$.

理由：联立方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=1 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$，方程组的增

广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第2行}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & a^2-a & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-2 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

(2)没有公共解，常数列有主元，$1-a=0,\ a-2\neq 0$，$a=1.$

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

(2)没有公共解，常数列有主元，$1-a=0$, $a-2\neq 0$，$a=1$.

10.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$与方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$同解，则$a+b=$

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

(2)没有公共解，常数列有主元，$1-a=0$, $a-2\neq 0$，$a=1$.

10.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$与方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$同解，则$a+b=$

解 1

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

(2)没有公共解，常数列有主元，$1-a=0$, $a-2\neq 0$，$a=1$.

10.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$与方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$同解，则$a+b=$

解 1

理由：

自测题第二章难点解答

(1)有唯一的公共解，则$\overline{A}$有三个主元且常数列无主元，$1-a\neq 0$，$a\neq 1$；

(2)没有公共解，常数列有主元，$1-a=0$, $a-2\neq 0$，$a=1$.

10.原题：若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$与方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$同解，则$a+b=$

解 1

理由：因为$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$同解，

自测题第二章难点解答

所以

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=a \\ x_1-x_3+bx_4=-1 \end{cases}$$ 与 $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \end{cases}$$ 同

解，所以方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 1 & 0 & -1 & b & -1 \end{pmatrix}$ 经过初等行变换可以化为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

$$\text{而 } \overline{A} \xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a-1 \\ 0 & -1 & -2 & b-1 & -2 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\text{而 } \overline{A} \xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a-1 \\ 0 & -1 & -2 & b-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行加到第4行}]{\text{第2行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 & 0 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\text{而}\ \overline{A}\ \xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & a-1 \\ 0 & -1 & -2 & b-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行加到第4行}]{\text{第2行}(-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 & 0 \end{pmatrix}$$

所以$a-3=0,\ b+2=0$，$a=3,\ b=-2.$

自测题第二章难点解答

11.原题： 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(1)有解，则其通解中自由未知量的个数是；(2)无解，则a, b满足.

自测题第二章难点解答

11.原题： 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

(1)有解，则其通解中自由未知量的个数是；(2)无解，则a，b满足.

解 (1)3；(2)$b\neq 3a$或者$b-5a+2\neq 0$.

自测题第二章难点解答

11.原题： 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

(1)有解，则其通解中自由未知量的个数是；(2)无解，则a，b满足.

解 (1)3；(2)$b\neq 3a$或者$b-5a+2\neq 0$.

理由：

自测题第二章难点解答

11.原题： 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(1)有解，则其通解中自由未知量的个数是；(2)无解，则a，b满足.

解 (1)3；(2)$b \neq 3a$或者$b - 5a + 2 \neq 0$.

理由：方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-5)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-3)\text{倍加到第3行}} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 2-5a \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-5)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-3)\text{倍加到第3行}} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 2-5a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b-5a \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-5)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-3)\text{倍加到第3行}} \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 2-5a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b-5a \end{pmatrix}$$

(1)有解，则常数列无主元，$b-3a=0$且$2+b-5a=0$，主元个数为2，自由未知量个数为3.

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-5)\text{倍加到第4行}]{\text{第1行}(-3)\text{倍加到第3行}} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3a \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & 2-5a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行加到第4行}]{\text{第2行加到第3行}} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b-5a \end{pmatrix}$$

(1)有解，则常数列无主元，$b-3a=0$且$2+b-5a=0$，主元个数为2，自由未知量个数为3.

(2)无解，则常数列有主元，$b-3a\neq 0$或者$2+b-5a\neq 0$.

自测题第二章难点解答

12.原题： 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

(1)有唯一解，则；(2)有无穷多解，则；(3)线性方程组无解的充分条件.

自测题第二章难点解答

12.原题： 若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

(1)有唯一解，则；(2)有无穷多解，则；(3)线性方程组无解的充分条件.

解 (1)$b \neq 0$且$a \neq 1$；(2)$a = 1$且$b = \frac{1}{2}$；(3)$b = 0$或者$a = 1$，$b \neq \frac{1}{2}$.

自测题第二章难点解答

12.原题： 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

(1)有唯一解，则；(2)有无穷多解，则；(3)线性方程组无解的充分条件.

解 (1)$b\neq 0$且$a\neq 1$；(2)$a=1$且$b=\frac{1}{2}$；(3)$b=0$或者 $a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$.

理由：

自测题第二章难点解答

12.原题： 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

(1)有唯一解，则；(2)有无穷多解，则；(3)线性方程组无解的充分条件.

解 (1)$b\neq 0$且$a\neq 1$；(2)$a=1$且$b=\frac{1}{2}$；(3)$b=0$或者$a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$

自测题第二章难点解答

12.原题： 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

(1)有唯一解，则；(2)有无穷多解，则；(3)线性方程组无解的充分条件.

解 (1)$b\neq 0$且$a\neq 1$；(2)$a=1$且$b=\frac{1}{2}$；(3)$b=0$或者$a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$.

理由：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1行}(-1)\text{倍加到第3行}]{\text{第1行}(-1)\text{倍加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \\ 0 & 2b-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{交换2、3两行}]{\text{第2行}(-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{交换2、3两行}]{\text{第2行}(-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行}-(b-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & (1-a)b & 1-2b \end{pmatrix}$$

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{交换2、3两行}]{\text{第2行}(-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行}-(b-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & (1-a)b & 1-2b \end{pmatrix}$$

(1)有唯一解，则常数列无主元，有3个主元，$(1-a)b \neq 0$，$a \neq 1$且$b \neq 0$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{交换2、3两行}]{\text{第2行}(-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行}-(b-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & (1-a)b & 1-2b \end{pmatrix}$$

(1)有唯一解，则常数列无主元，有3个主元，$(1-a)b \neq 0$，$a \neq 1$且$b \neq 0$；

(2)有无穷多解，则主元个数< 3且常数列无主元，$(1-a)b = 0$且$1-2b = 0$，$a = 1$且$b = \frac{1}{2}$；

自测题第二章难点解答

$$\xrightarrow[\text{交换2、3两行}]{\text{第2行}(-2)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & b-1 & 1-a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行}-(b-1)\text{倍加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & (1-a)b & 1-2b \end{pmatrix}$$

(1)有唯一解，则常数列无主元，有3个主元，$(1-a)b \neq 0$，$a \neq 1$且$b \neq 0$；

(2)有无穷多解，则主元个数<3且常数列无主元，$(1-a)b=0$且$1-2b=0$，$a=1$且$b=\frac{1}{2}$；

(3)无解，必须常数列有主元，$(1-a)b=0$且$1-2b\neq 0$，$b=0$或者$a=1$，$b\neq\frac{1}{2}$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com