线性代数
自测题第四章难点解答

宁 群

(宿州学院 数学与统计学院)

目录

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 的值与x_{21},x_{22},x_{23}的取值无关，则$a=$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：利用行列式的性质，

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：利用行列式的性质，

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：利用行列式的性质，

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x_{22} - 2x_{21} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：利用行列式的性质，

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x_{22} - 2x_{21} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = -a(x_{22} - 2x_{21})$$

自测题第四章难点解答

1.原题：利用行列式的性质，若3阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$的值与x_{21}, x_{22}, x_{23}的取值无关，则$a =$

解 $a = 0$

理由：利用行列式的性质，

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x_{22} - 2x_{21} & x_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = -a(x_{22} - 2x_{21})$$

与x_{21}, x_{22}, x_{23}无关，必有$a = 0$.

自测题第四章难点解答

2.原题：如下给出几个三阶行列式①$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$，

②$\begin{vmatrix} a & a+2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$，③$\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ a-1 & a & a+1 \\ -a & -1 & a \end{vmatrix}$，

④$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix}$，其中，行列式的值与$a$无关的有

自测题第四章难点解答

2.原题：如下给出几个三阶行列式①$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$，

②$\begin{vmatrix} a & a+2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$，③$\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ a-1 & a & a+1 \\ -a & -1 & a \end{vmatrix}$，

④$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix}$，其中，行列式的值与$a$无关的有

解 3个.

自测题第四章难点解答

2.原题：如下给出几个三阶行列式① $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$，

② $\begin{vmatrix} a & a+2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$，③ $\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ a-1 & a & a+1 \\ -a & -1 & a \end{vmatrix}$，

④ $\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix}$，其中，行列式的值与$a$无关的有

解 3个.

理由：

自测题第四章难点解答

2.原题：如下给出几个三阶行列式① $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$，

② $\begin{vmatrix} a & a+2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$，③ $\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ a-1 & a & a+1 \\ -a & -1 & a \end{vmatrix}$，

④ $\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix}$，其中，行列式的值与$a$无关的有

解 3个.

理由：①将第1行乘$(-a)$加到第2行，第2行为0，行列式的值为0，与a无关；

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；
③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④ $$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}}$$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$\xlongequal{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2}(2a^2+5))\text{加到第3行}}$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2}(2a^2+5))\text{加到第3行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④ $$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2}(2a^2+5))\text{加到第3行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = 2(a^2-1),$$

自测题第四章难点解答

②第2行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

③第1行加到第3行，第3行为0，行列式的值为0，与a无关；

④ $$\begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ a-1 & -5 & -a+1 \\ -a & -2a+5 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第1行乘}a\text{加到第3行}]{\text{第1行乘}(1-a)\text{加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & -3-2a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第3行加到第2行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2a^2+5 & a^2-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2}(2a^2+5))\text{加到第3行}} \begin{vmatrix} 1 & 2a+2 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = 2(a^2-1),$$

与a有关.

自测题第四章难点解答

3.原题：设A，B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

自测题第四章难点解答

3.原题：设A, B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

自测题第四章难点解答

3.原题：设A，B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

理由：

自测题第四章难点解答

3.原题：设A，B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8.$

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=$
$\det[(A+B)(A-B)]$

自测题第四章难点解答

3.原题：设A, B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=\det[(A+B)(A-B)]=\det(A^2-AB+BA-B^2)$，

自测题第四章难点解答

3.原题：设A, B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=\det[(A+B)(A-B)]=\det(A^2-AB+BA-B^2)$，

一般$\neq\det(A^2-B^2)$.

自测题第四章难点解答

3.原题：设A，B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8.$

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=\det[(A+B)(A-B)]=\det(A^2-AB+BA-B^2)$，一般$\neq\det(A^2-B^2)$.

例如，$A=\begin{pmatrix}0&4&0\\ \frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

自测题第四章难点解答

3.原题：设A, B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=\det[(A+B)(A-B)]=\det(A^2-AB+BA-B^2)$，

一般$\neq\det(A^2-B^2)$.

例如，$A=\begin{pmatrix}0&4&0\\ \frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$A^2-B^2=A^2=2I$，但$\det(A+B)=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\det(A-B)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

自测题第四章难点解答

3.原题：设A，B是两个3阶方阵，且$A^2-B^2=2I$，则$\det(A+B)\det(A-B)=8$.

解 上述陈述是错误的.

理由：事实上，$\det(A+B)\det(A-B)=\det[(A+B)(A-B)]=\det(A^2-AB+BA-B^2)$，

一般$\neq\det(A^2-B^2)$.

例如，$A=\begin{pmatrix}0&4&0\\ \frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}$，

$A^2-B^2=A^2=2I$，但$\det(A+B)=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$\det(A-B)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\det(A+B)\det(A-B)=\frac{15}{2}\neq 8$

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

理由：

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

理由：若由九个数定义的值最大的3阶行列式是$\det A$，则交换$\det A$的1，2两行，得到值最小的行列式，最小值为$-\det A$，

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

理由：若由九个数定义的值最大的3阶行列式是$\det A$，则交换$\det A$的1，2两行，得到值最小的行列式，最小值为$-\det A$，所以和为0.

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

理由：若由九个数定义的值最大的3阶行列式是$\det A$，则交换$\det A$的1，2两行，得到值最小的行列式，最小值为$-\det A$，所以和为0.

5.原题：计算10阶行列式$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

自测题第四章难点解答

4.原题：由$1,2,3,4,5,6,7,8,9$九个数可以定义一个三阶行列式，则其可能的最大值与其可能的最小值之和是

解 0.

理由：若由九个数定义的值最大的3阶行列式是$\det A$，则交换$\det A$的1，2两行，得到值最小的行列式，最小值为$-\det A$，所以和为0.

5.原题：计算10阶行列式
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

解 $(-1)10!$

自测题第四章难点解答

理由：

自测题第四章难点解答

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}}$

自测题第四章难点解答

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 10 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 10 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

依次交换第1列与第2列,...,第9列与第10列

$$\xlongequal{\quad\quad\quad}$$

进行了9次相邻的列列交换

自测题第四章难点解答

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 10 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{进行了9次相邻的列列交换}]{\text{依次交换第1列与第2列,…,第9列与第10列}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

理由： 原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 \\ 10 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{进行了9次相邻的列列交换}]{\text{依次交换第1列与第2列,...,第9列与第10列}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -9 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

$= (-1)10!$

自测题第四章难点解答

6.原题：计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

自测题第四章难点解答

6.原题：计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

解 $n+1$

自测题第四章难点解答

6.原题：计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

解 $n+1$

理由：

自测题第四章难点解答

6.原题：计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

解 $n+1$

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}}$

自测题第四章难点解答

6.原题：计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

解 $n+1$

理由：原式 $\xlongequal{\text{各列都加到第1列}} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n+1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n+1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ n+1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

$$\overset{\text{第1行乘}(-1)\text{加到以下各行}}{=\!=\!=\!=}$$

自测题第四章难点解答

$$\xlongequal{\text{第1行乘}(-1)\text{加到以下各行}} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

自测题第四章难点解答

$$\xlongequal{\text{第1行乘}(-1)\text{加到以下各行}} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n+1$$

自测题第四章难点解答

$$\xlongequal{\text{第1行乘}(-1)\text{加到以下各行}} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n+1$$

7.原题：设5阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 10$$

自测题第四章难点解答

$$\text{则}\begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} =$$

自测题第四章难点解答

则 $\begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} =$

解 10.

自测题第四章难点解答

则 $\begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} =$

解 10.

理由：

自测题第四章难点解答

则 $\begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} =$

解 10.

理由：交换$|A|$的第1行和第5行，再交换其第2行和第4行，值不变，$|A| = \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

再交换它的第1列和第5列，第2列和第4列，值仍不变，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

自测题第四章难点解答

再交换它的第1列和第5列，第2列和第4列，值仍不变，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = 10.$$

自测题第四章难点解答

再交换它的第1列和第5列，第2列和第4列，值仍不变，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{55} & a_{54} & a_{53} & a_{52} & a_{51} \\ a_{45} & a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = 10.$$

8.原题：设三阶行列式$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

记$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 2a_{11} & a_{22} - 2a_{12} & a_{23} - 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

自测题第四章难点解答

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{33} & a_{23} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}-2a_{31} & a_{12}-2a_{32} & a_{13}-2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & 3a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则(1)与D相等的是；(2)等于$-2D$的是；(3)等于$3D$的是.

自测题第四章难点解答

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{33} & a_{23} \\ a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} - 2a_{31} & a_{12} - 2a_{32} & a_{13} - 2a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & 3a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则(1)与D相等的是；(2)等于$-2D$的是；(3)等于$3D$的是.

解 (1)D_1；(2)D_3；(3)D_4

自测题第四章难点解答

理由：

自测题第四章难点解答

理由： (1)将D的第1行乘(-2)加到第2行，得D_1，所以$D=D_1$；

自测题第四章难点解答

理由： (1)将D的第1行乘(-2)加到第2行，得D_1，所以 $D=D_1$；

(2)将D的第3行乘(-2)，再将第1行加到第3行，得D_3，所以 $D_3=-2D$；

自测题第四章难点解答

理由：(1)将D的第1行乘(-2)加到第2行，得D_1，所以$D=D_1$；

(2)将D的第3行乘(-2)，再将第1行加到第3行，得D_3，所以$D_3=-2D$；

(3)将D的第2行乘(-1)，再将第2列乘(-3)，得D_4，所以$D_4=3D$.

自测题第四章难点解答

理由：(1)将D的第1行乘(-2)加到第2行，得D_1，所以$D=D_1$；

(2)将D的第3行乘(-2)，再将第1行加到第3行，得D_3，所以$D_3=-2D$；

(3)将D的第2行乘(-1)，再将第2列乘(-3)，得D_4，所以$D_4=3D$.

9.原题：设$A=\begin{pmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{pmatrix}$，则$\det A=$

自测题第四章难点解答

理由：(1)将D的第1行乘(-2)加到第2行，得D_1，所以$D=D_1$；

(2)将D的第3行乘(-2)，再将第1行加到第3行，得D_3，所以$D_3=-2D$；

(3)将D的第2行乘(-1)，再将第2列乘(-3)，得D_4，所以$D_4=3D$.

9.原题：设$A=\begin{pmatrix} x & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & x & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & x & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & x & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & x \end{pmatrix}$，则$\det A=$

解 $(20+x)(x-5)^4$

自测题第四章难点解答

理由：

自测题第四章难点解答

理由： $\det A \overset{\text{各列加到第1列}}{=\!=\!=\!=}$

自测题第四章难点解答

理由： $\det A \overset{\text{各列加到第1列}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

理由： $\det A \overset{\text{各列加到第1列}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}$

$\overset{\text{第1行乘}(-1)\text{ 加到以下各行}}{=\!=\!=\!=}$

自测题第四章难点解答

$$\text{理由：} \det A \xlongequal{\text{各列加到第1列}} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第1行乘}(-1)\text{ 加到以下各行}} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix}$$

自测题第四章难点解答

理由： $\det A \overset{\text{各列加到第1列}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & x & 5 & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & x & 5 & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & x & 5 \\ x+20 & 5 & 5 & 5 & x \end{vmatrix}$

$\overset{\text{第1行乘}(-1)\text{加到以下各行}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} x+20 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix}$

$= (20+x)(x-5)^4$

自测题第四章难点解答

10.原题： 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，

记η为A^*列向量组中

(1)第三列列向量，则$\eta=$；(2)第二列列向量，则$\eta=$；

自测题第四章难点解答

10.原题： 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，

记η为A^*列向量组中

(1)第三列列向量，则$\eta=$；(2)第二列列向量，则$\eta=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

自测题第四章难点解答

10.原题： 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，

记η为A^*列向量组中

(1)第三列列向量，则$\eta=$；(2)第二列列向量，则$\eta=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

理由：

自测题第四章难点解答

10.原题： 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，记$\eta$为$A^*$列向量组中

(1)第三列列向量，则$\eta=$；(2)第二列列向量，则$\eta=$；

解 (1)$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

理由：(1)A^*的第3列元素是A的第3行元素的代数余子式，而$A_{31}=0$，$A_{32}=-1$，$A_{33}=1$，所以$\eta=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式，

而$A_{21}=-1$，$A_{22}=1$，$A_{23}=0$，所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式，

而$A_{21}=-1$，$A_{22}=1$，$A_{23}=0$，所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

11.原题： 设A是3阶方阵，且$|A|=2$，则A的伴随矩阵$A^*=$

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式,

而$A_{21}=-1$, $A_{22}=1$, $A_{23}=0$,所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$;

11.原题: 设A是3阶方阵,且$|A|=2$,则A的伴随矩阵$A^*=$

解 $2A^{-1}$

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式，

而$A_{21}=-1$，$A_{22}=1$，$A_{23}=0$，所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

11.原题： 设A是3阶方阵，且$|A|=2$，则A的伴随矩阵$A^*=$

解 $2A^{-1}$

理由：

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式，

而$A_{21}=-1$，$A_{22}=1$，$A_{23}=0$，所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

11.原题： 设A是3阶方阵，且$|A|=2$，则A的伴随矩阵$A^*=$

解 $2A^{-1}$

理由：因为$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$.

自测题第四章难点解答

(2)A^*的第2列元素是A的第2行元素的代数余子式,

而$A_{21}=-1$, $A_{22}=1$, $A_{23}=0$, 所以$\eta=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$;

11.原题: 设A是3阶方阵,且$|A|=2$,则A的伴随矩阵$A^*=$

解 $2A^{-1}$

理由: 因为$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 所以$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$.

11.原题: 设矩阵$A=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$的行列式$\det A=9$,

记M_{ij}为$|A|$的第i行,第j列位置元素的余子式,

则$M_{11}+M_{12}+M_{13}=$

自测题第四章难点解答

解 -3.

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由:

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$$A_{11} = M_{11},\ A_{12} = -M_{12},\ A_{13} = M_{13},$$

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由： 由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11},\ A_{12}=-M_{12},\ A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9,\ M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9$，$M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

12.原题： 设A,B都是3阶方阵，

且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9$，$M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

12.原题： 设A,B都是3阶方阵，

且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$

解 3.

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9$，$M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

12.原题： 设A,B都是3阶方阵，

且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$

解 3.

理由：

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9$，$M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

12.原题： 设A,B都是3阶方阵，

且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$

解 3.

理由：因为$A(A^{-1}+B)B^{-1}=A+B^{-1}$

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11}=M_{11}$，$A_{12}=-M_{12}$，$A_{13}=M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11}+3A_{12}+(-3)A_{13}=9$，即，

$(-3)M_{11}+3(-M_{12})+(-3)M_{13}=9$，$M_{11}+M_{12}+M_{13}=-3.$

12.原题： 设A,B都是3阶方阵，

且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$

解 3.

理由：因为$A(A^{-1}+B)B^{-1}=A+B^{-1}$

所以，$|A+B^{-1}|=|A||(A^{-1}+B)||B^{-1}|$

自测题第四章难点解答

解 -3.

理由：由代数余子式的概念，

$A_{11} = M_{11}$, $A_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = M_{13}$，

$|A|$按第1行展开，$(-3)A_{11} + 3A_{12} + (-3)A_{13} = 9$，即，

$(-3)M_{11} + 3(-M_{12}) + (-3)M_{13} = 9$, $M_{11} + M_{12} + M_{13} = -3.$

12.原题： 设A, B都是3阶方阵，

且$|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$，则$|A + B^{-1}| =$

解 3.

理由：因为$A(A^{-1} + B)B^{-1} = A + B^{-1}$

所以，$|A + B^{-1}| = |A||(A^{-1} + B)||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A > 0$，则(1)$\det A =$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A>0$，则(1)$\det A=$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

解 (1)2；(2)$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{1}{2}\\1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A > 0$，则(1)$\det A =$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

解 (1)2；(2)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

理由：

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A > 0$，则(1)$\det A =$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

解 (1)2；(2)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

理由：(1)因为$AA^* = |A|I_3$，所以$|A||A^*| = |A|^3$，$|A|^2 = |A^*| = 4$，

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A > 0$，则(1)$\det A =$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

解 (1)2；(2)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

理由：(1)因为$AA^* = |A|I_3$，所以$|A||A^*| = |A|^3$，$|A|^2 = |A^*| = 4$，又$|A| > 0$，所以$|A| = 2$.

自测题第四章难点解答

13.原题：设A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$A$的行列式$\det A > 0$，则(1)$\det A =$；(2)$A$的逆矩阵$A^{-1}$

解 (1)2；(2)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

理由：(1)因为$AA^* = |A|I_3$，所以$|A||A^*| = |A|^3$，$|A|^2 = |A^*| = 4$，又$|A| > 0$，所以$|A| = 2.$

(2)$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，而$|A| = 2$，所以

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^* =$

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^*=$

解 9.

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^* =$

解 9.

理由：

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A| = -3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^* =$

解 9.

理由：因为$AA^* = |A|I_3$，所以$|A||A^*| = |A|^3$，$|A^*| = |A|^2 = 9$

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^*=$

解 9.

理由：因为$AA^*=|A|I_3$，所以$|A||A^*|=|A|^3$，$|A^*|=|A|^2=9$

15.原题： 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是3阶非零方阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，若对任意的i,j，都有$a_{ij}+A_{ij}=0$，则A的行列式$\det A=$

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A| = -3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^* =$

解 9.

理由：因为$AA^* = |A|I_3$，所以$|A||A^*| = |A|^3$，$|A^*| = |A|^2 = 9$

15.原题： 设$A = (a_{ij})_{3\times3}$是3阶非零方阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，若对任意的i, j，都有$a_{ij} + A_{ij} = 0$，则A的行列式$\det A =$

解 -1

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^*=$

解 9.

理由：因为$AA^*=|A|I_3$，所以$|A||A^*|=|A|^3$，$|A^*|=|A|^2=9$

15.原题： 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是3阶非零方阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，若对任意的i,j，都有$a_{ij}+A_{ij}=0$，则A的行列式$\det A=$

解 -1

理由：

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^* =$

解 9.

理由：因为$AA^*=|A|I_3$，所以$|A||A^*|=|A|^3$，$|A^*|=|A|^2=9$

15.原题： 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是3阶非零方阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，若对任意的i,j，都有$a_{ij}+A_{ij}=0$，则A的行列式$\det A =$

解 -1

理由：因为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

自测题第四章难点解答

14.原题：设A是一个3阶方阵，且$|A|=-3$，则A的伴随矩阵A^*的行列式$\det A^*=$

解 9.

理由：因为$AA^*=|A|I_3$，所以$|A||A^*|=|A|^3$，$|A^*|=|A|^2=9$

15.原题： 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是3阶非零方阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，若对任意的i,j，都有$a_{ij}+A_{ij}=0$，则A的行列式$\det A=$

解 -1

理由：因为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-A^T,$$

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解 $-(ad - bc)^2$.

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解 $-(ad-bc)^2$.

理由：

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，
$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解 $-(ad-bc)^2$.

理由：原式 $\overset{\text{第1行展开}}{=\!=\!=\!=}$ $(-a)\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解 $-(ad-bc)^2$.

理由：原式 $\overset{\text{第1行展开}}{=\!=\!=\!=} (-a)\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

$= (-ad)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

自测题第四章难点解答

而$AA^* = |A|I_3$，即，$A(-A^T) = |A|I_3$，$|A||-A^T| = |A|^3$，$-|A|^2 = |A|^3$, $|A| = -1$.

16.原题：计算4阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解 $-(ad-bc)^2$.

理由：原式 $\overset{\text{第1行展开}}{=\!=\!=\!=}$ $(-a)\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$

$$= (-ad)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2.$$

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com