线性代数
历年硕士研究生入学考试试题
(2000—2017)

宿州学院　数学与统计学院

宿州学院
SUZHOU UNIVERSITY

目录

00

1

已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$无解，

则$a=$____.

00

1

已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$无解，

则$a =$ ____.

答案：$\underline{-1}$.

因为方程组无解$\Leftrightarrow$系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩.

而其增广矩阵经初等行变换可以化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

00

$a=-1$时，系数矩阵的秩为2，增广矩阵的秩为3，方程组无解.

2

设n维向量组$\alpha_1,...,\alpha_m\ (m<n)$线性无关，则$n$维向量组$\beta_1,...,\beta_m$线性无关的充要条件是___.

A.向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$可以由向量组$\beta_1,...,\beta_m$线性表出；

B.向量组$\beta_1,...,\beta_m$可以由向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$线性表出；

C.向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$与向量组$\beta_1,...,\beta_m$等价；

D.矩阵$A=(\alpha_1,...,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,...,\beta_m)$等价.

00

$a=-1$时，系数矩阵的秩为2，增广矩阵的秩为3，方程组无解.

2

设n维向量组$\alpha_1,...,\alpha_m\ (m<n)$线性无关，则$n$维向量组$\beta_1,...,\beta_m$线性无关的充要条件是___.

A.向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$可以由向量组$\beta_1,...,\beta_m$线性表出；

B.向量组$\beta_1,...,\beta_m$可以由向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$线性表出；

C.向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$与向量组$\beta_1,...,\beta_m$等价；

D.矩阵$A=(\alpha_1,...,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,...,\beta_m)$等价.

答案：$\underline{D}$.

A.是向量组$\beta_1,...,\beta_m$线性无关的充分条件，不是必要条件；

如，3维向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2$与$\varepsilon_2,\varepsilon_3$都线性无关，但它们不能相互的线性表出.所以选择支$A.,B.,C.$均不正确.

3

设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，

且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$,其中I是4阶单位矩阵，求矩阵B.

00

如，3维向量组$\varepsilon_1,\varepsilon_2$与$\varepsilon_2,\varepsilon_3$都线性无关，但它们不能相互的线性表出.所以选择支$A.,B.,C.$均不正确.

3

设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，

且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$,其中I是4阶单位矩阵，求矩阵B.

解：因为$AA^*=A^*A=|A|I$，两边同时取行列式，得

$|A||A^*|=|A|^4$,$|A^*|=|A|^3$.

而$|A^*|=8$，所以$|A|=2$.

00

又因为

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I,$$

$$(A-I)B=3A,$$

$$A^*(A-I)B=3A^*A,$$

$$(|A|I-A^*)B=3|A|I,$$

所以，$B=6(2I-A^*)^{-1}$.

而，$2I-A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$，

00

利用初等变换法，求得：

$$(2I - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

所以，$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

01

4

设矩阵A满足$A^2+A-4I=0$,其中I为单位矩阵，则$(A-I)^{-1}=$____.

01

4

设矩阵A满足$A^2+A-4I=0$,其中I为单位矩阵，则$(A-I)^{-1}=$____.

答案： $\frac{1}{2}(A+2I)$.

因为，$A^2+A-4I=0$，$(A+2I)(A-I)=2I$，

$[\frac{1}{2}(A+2I)](A-I)=I$，所以，$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I)$.

01

4

设矩阵A满足$A^2+A-4I=0$,其中I为单位矩阵，则$(A-I)^{-1}=$____.

答案：$\underline{\frac{1}{2}(A+2I)}$.

因为，$A^2+A-4I=0$，$(A+2I)(A-I)=2I$，
$[\frac{1}{2}(A+2I)](A-I)=I$，所以，$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I)$.

5

设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$A$与$B$___.

01

5(续)

A.合同且相似；　B.合同但不相似；

C.不合同但相似；　D.不合同且不相似.

01

5(续)

A.合同且相似； B.合同但不相似；
C.不合同但相似； D.不合同且不相似.

答案：$\underline{\ A\ }$.

矩阵A是实对称矩阵，一定相似且合同于对角阵，对角元素为其特征值.

计算得，A的特征值为4，0，且A的秩为1，所以选A.

01

6

设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$是线性方程组$AX = 0$的一个基础解系.

$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$，

$\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3$，

$\vdots$

$\beta_{s-1} = t_1\alpha_{s-1} + t_2\alpha_s$，

$\beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$，

其中t_1, t_2是常数.

问t_1, t_2满足什么关系时，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$为$AX = 0$的基础解系.

01

解：因为$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$是$AX=0$的一个基础解系，

所以，$AX=0$的s个线性无关的解都构成其基础解系.

而β_k，$k=1,2,...,s$是$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$的线性组合，

仍是$AX=0$的解，

所以，$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$为$AX=0$的基础解系当且仅当

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$线性无关.

记s阶矩阵$A=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{pmatrix}_{s\times s}$，

01

则$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)A$.

又因为$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关，

所以$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$线性无关当且仅当$|A|\neq 0$.

而$|A|$按第一行展开，得$|A|=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$.

所以，当$t_1^s\neq(-1)^s t_2^s$时，$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$是$AX=0$的基础解系.

02

7

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，经正交变换$X=PY$ 可化为标准形$f=6y^2$,则$a=$____.

02

7

已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，经正交变换$X=PY$ 可化为标准形$f=6y^2$,则$a=$____.

答案：$\underline{2}$.

设二次型的矩阵为A，则6是其唯一的非零特征值，

所以，A的行列式$|A|=(a+4)(a-2)^2=0$且A的秩$r(A)=1$.

所以，$a=-4$或$a=2$.

而当$a=-4$时，$r(A)=2$，所以$a=2$.

02

8

已知4阶方阵$A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$.若$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，求线性方程组$AX = \beta$的通解.

8

已知4阶方阵$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$AX=\beta$的通解.

解：因为$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，

所以，$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$，且$A$的秩为3.

即，$X_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的一个非零解，且为$AX=0$的基础解系.

02

又因为，$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，

所以，$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$是方程组$AX = \beta$的一个解，

所以，通解为$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{为任意数} \right\}$.

02

9

设A,B是同阶方阵.

(1)如果A,B相似，试证A,B的特征多项式相等；

(2)举一个二阶方阵的例子，证明(1)的逆命题不成立；

(3)当A,B均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

9

设A,B是同阶方阵.

(1)如果A,B相似，试证A,B的特征多项式相等；

(2)举一个二阶方阵的例子，证明(1)的逆命题不成立；

(3)当A,B均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

证明：(1) 因为A,B相似，

所以，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$。从而有

$$|\lambda I-A|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}(\lambda I)P-P^{-1}AP|=|\lambda I-B|.$$

即A,B有相同的特征多项式.

02

(2)取$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，

则A,B有相同的特征多项式$(\lambda-1)^2$，但与A相似的只有矩阵A自己，A与B不相似，

(1)的逆命题不成立.

(3)因为对称矩阵相似于对角形矩阵，且对角元为其特征值.

而矩阵A,B有相同的特征多项式，所以有相同的特征值，
从而它们相似于同一个对角矩阵，所以，A,B相似.

03

10

设α是3维列向量，α^T是α的转置. 若$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

则$\alpha^T\alpha =$ ____.

03

10

设α是3维列向量，α^T是α的转置. 若$\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\alpha^T\alpha = \underline{\qquad}$.

答案：$\underline{\ 3\ }$.

因为，$(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = (\alpha^T\alpha)(\alpha\alpha^T) = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

所以，$\alpha^T\alpha = \underline{\ 3\ }$.

03

11

设3阶矩阵A, B满足$A^2B - A - B = I$,其中I是三阶单位矩阵.

若$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$B$的行列式$|B| =$ ____.

03

11

设3阶矩阵A, B满足$A^2B - A - B = I$,其中I是三阶单位矩阵.

若$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$B$的行列式$|B| =$ ____.

答案：$\frac{1}{2}$.

因为，$A^2B - A - B = I$, $(A^2 - I)B = (A + I)$，

$(A - I)(A + I)B = A + I$, $(A - I)B = I$，

所以，$|B| = \frac{1}{|A-I|} = \frac{1}{2}$.

03

12

设n维向量$\alpha = (a, 0, ..., 0, a)^T$，$a < 0$.$I$是$n$阶单位矩阵.矩阵$A = I - \alpha\alpha^T$，$B = I + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T$.若$A$的逆矩阵是$B$，则$a = $ ____.

03

12

设n维向量$\alpha=(a,0,...,0,a)^T$，$a<0.I$是n阶单位矩阵.矩阵$A=I-\alpha\alpha^T$，$B=I+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$.若$A$的逆矩阵是$B$，则$a=$ ____.

答案： $\underline{-1}$.

因为，$AB=I$,

$(I-\alpha\alpha^T)(I+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)=I+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=I$,

$(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=(\alpha^T\alpha)(\alpha\alpha^T)=2a^2(\alpha\alpha^T),(\alpha\alpha^T)\neq0$,

所以，$2a^2+a-1=0$，$a<0$，$a=-1$.

03

13

设A, B均为3阶矩阵，I为3阶单位矩阵.

已知$AB = 2A + B$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,则$(A - I)^{-1} =$ ____.

03

13

设A, B均为3阶矩阵，I为3阶单位矩阵.

已知$AB = 2A + B$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,则$(A-I)^{-1} = ____$.

答案：$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因为，$AB = 2A + B$,

$(A-I)B = 2(A-I) + 2I, (A-I)[\frac{1}{2}(B-2I)] = I$,

$(A-I)^{-1} = \frac{1}{2}(B-2I)$.

03

14

设向量组$I:\alpha_1,...,\alpha_r$可以由向量组$II:\beta_1,...,\beta_s$线性表出，则____.

$A.\ r<s$时，向量组II必线性相关；

$B.\ r>s$时，向量组II必线性相关；

$C.\ r<s$时，向量组I必线性相关；

$D.\ r>s$时，向量组I必线性相关.

03

14

设向量组$I:\alpha_1,...,\alpha_r$可以由向量组$II:\beta_1,...,\beta_s$线性表出，则___.

$A.\ r<s$时，向量组II必线性相关；

$B.\ r>s$时，向量组II必线性相关；

$C.\ r<s$时，向量组I必线性相关；

$D.\ r>s$时，向量组I必线性相关.

答案：$\underline{D}$.

向量组向量个数多的被少的线性表出，多的一定线性相关.

所以，选D..

03

15

3阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若$A$的伴随矩阵的秩为1，则必有____.

$A. a=b$或$a+2b=0$;　$B. a=b$或$a+2b\neq 0$;

$C. a\neq b$且$a+2b=0$;　$D. a\neq b$且$a+2b\neq 0$.

03

15

3阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若$A$的伴随矩阵的秩为1，则必有___.

$A.a=b$或$a+2b=0$;　$B.a=b$或$a+2b\neq 0$;

$C.a\neq b$且$a+2b=0$;　$D.a\neq b$且$a+2b\neq 0$.

答案：$\underline{A}$.

因为$AA^*=|A|I,|A||A^*|=|A|^3$，而A^*的秩为1，$|A^*|=0$，

所以，$|A|=0$,且A至少有一个2阶子式不为0.

而$|A|=(a+2b)(a-b)^2=0$，所以，$a=b$或$a+2b=0$，

但在$a=b$时，A的秩为至多为1，$A^*=0$，所以$a\neq b$.

03

16

设$\alpha_1, ..., \alpha_s$均为n维向量，则下列结论不正确的是___.

A.若对任意一组不全为0的数$k_1, ..., k_s$，

都有$k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s \neq 0$，则$\alpha_1, ..., \alpha_s$线性无关；

B.若$\alpha_1, ..., \alpha_s$线性相关，

则对任意一组不为0的数$k_1, ..., k_s$，有$k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s = 0$；

C.$\alpha_1, ..., \alpha_s$线性无关的充要条件是此向量组的秩为s;

D.$\alpha_1, ..., \alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

03

16

设$\alpha_1,...,\alpha_s$均为n维向量，则下列结论不正确的是___.

$A.$若对任意一组不全为0的数$k_1,...,k_s$，

都有$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,...,\alpha_s$线性无关；

$B.$若$\alpha_1,...,\alpha_s$线性相关，

则对任意一组不为0的数$k_1,...,k_s$，有$k_1\alpha_1+...+k_s\alpha_s=0$；

$C.\alpha_1,...,\alpha_s$线性无关的充要条件是此向量组的秩为s;

$D.\alpha_1,...,\alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

答案：$\underline{B}$.

向量组线性相关是存在不全为零的系数使其组合等于零成立，而不是所有的非零系数使其组合为零成立。

03

17

设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，已知矩阵$A$相似于$B$，则$A-2I$的秩与$A-I$的秩的和是___.

$A.\ 2\quad B.\ 3;\quad C.\ 4;\quad D.\ 5.$

03

17

设矩阵$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵$A$相似于$B$，则$A-2I$的秩与$A-I$的秩的和是___.

$A.\ 2\quad B.\ 3;\quad C.\ 4;\quad D.\ 5.$

答案：$\underline{\ C\ }$.

因为A,B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，

从而，$P^{-1}(A-2I)P=B-2I, P^{-1}(A-I)P=B-I.$

而$r(B-2I)=3, r(B-I)=1$，相似矩阵有相同的秩，

所以，$r(A-2I)+r(A-I)=4.$

03

18

若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角阵$D$，试确定常数$a$，并求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=D$.

03

18

若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角阵$D$，试确定常数$a$，并求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP=D$.

解：矩阵A的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$$

所以，A有二重特征值$\lambda_1=6$,一重特征值$\lambda_2=-2$;

03

将二重特征值$\lambda_1=6$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{cases} 4x_1 & -2x_2 & & =0 \\ -8x_1 & +4x_2 & -ax_3 & =0 \end{cases}$$

A可相似对角化的充分必要条件是二重特征值$\lambda_1=6$有两个线性无关的特征向量，所以$a=0$.

此时矩阵A属于特征值$\lambda_1=6$的两个线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

03

将一重特征值$\lambda_1 = -2$代入齐次线性方程组

$(\lambda I - A)X = 0$，得$\begin{cases} -4x_1 & -2x_2 & & = 0 \\ -8x_1 & -4x_2 & & = 0 \\ & & -8x_3 & = 0 \end{cases}$，

属于$\lambda_1 = -2$线性无关的特征向量$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

03

19

已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n & =0 \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n & =0 \\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n & =0 \\ \vdots \quad \vdots \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n & =0 \end{cases}.$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.试讨论$a_1, a_2, ..., a_n$与$b$满足什么关系时，

(1)方程组仅有零解；

(2)方程组有非零解.有非零解时，求出其基础解系.

03

解：方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

将其各列都加到第一列，然后再将其第一行乘-1加到以下各行，计算得$|A| = b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)$.

所以，当$b \neq 0$且$b \neq -\sum_{i=1}^{n} a_i$时，方程的系数行列式$|A| \neq 0$，方程只有零解；

03

当$b=0$或$b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$时，方程的系数行列式$|A|=0$，方程有非零解.

当$b=0$时，方程组同解于$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，

由于$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，所以$a_1,a_2,...,a_n$不全为0，不妨设$a_1\neq 0$，

从而方程组此时的基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{a_3}{a_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a_n}{a_1}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

03

当$b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$时，方程组系数矩阵的秩$r(A)=n-1$，其基础解系含一个解.

而$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$是其一个非零解，所以也是此时方程组的基础解系.

03

当$b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$时，方程组系数矩阵的秩$r(A)=n-1$，其基础解系含一个解.

而$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$是其一个非零解，所以也是此时方程组的基础解系.

20

设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，$(b>0)$，

其中二次型的矩阵A的特征值之和为1，特征值之积为-12.

(1)求a,b的值；(2)利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

03

解：(1)$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，特征值之和等于$A$的迹$trA$，特征值之积等于$A$的行列式$|A|$，所以，

$$a+2+(-2)=1, -4a-2b^2=-12,$$

即，$a=1, b=2\ (b>0)$.

(2)A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

所以，A有二重特征值$\lambda_1=2$，一重特征值$\lambda_2=-3$.

03

将二重特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$

得$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3=0 \\ -2x_1 \quad +4x_3=0 \end{cases}$，其同解于$x_1-2x_3=0$，

有基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$

即，矩阵A属于特征值$\lambda_1=2$线性无关的特征向量为η_1,η_2.

将其正交单位化后得$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$

03

将特征值$\lambda_2=-3$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{cases}-4x_1 & & -2x_3 & =0\\ & -5x_2 & & =0\\ -2x_1 & & -x_3 & =0\end{cases}，有基础解系\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},$$

即，矩阵A属于特征值$\lambda_2=-3$线性无关的特征向量为η_3.

将其单位化为$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

取$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则$P$是一个正交矩阵，

03

且$P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

即正交变换$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$

化原二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$为标准形，

其对应的正交矩阵为P.

03

21

设向量组$I:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\end{pmatrix}$和

向量组$II:\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a+6\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\a+4\end{pmatrix}$.

试问a为何值时，向量组I与向量组II等价；a为何值时，向量组I与向量组II不等价.

03

解：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列的行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = a+1$,

以β_1,β_2,β_3为列的行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = 6$，

所以，β_1,β_2,β_3的秩为3.

即，β_1,β_2,β_3是3维数组空间的一个基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出.

03

当$a \neq -1$时，以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列的行列式非零，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，是3维数组空间的一个基，

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出. 即$I$与$II$等价.

当$a = -1$时，以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列的行列式=0，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的秩$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$,它不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出，这时$I$与$II$不等价.

03

当$a\neq-1$时，以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列的行列式非零，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，是3维数组空间的一个基，

β_1,β_2,β_3可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出. 即$I$与$II$等价.

当$a=-1$时，以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列的行列式=0，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2<3$,它不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表出，这时$I$与$II$不等价.

22

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$可逆，向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是矩阵$A^*$的一个特征向量，$\lambda$为$\alpha$对应的特征值，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵. 求$a,b$和$\lambda$的值.

03

解：因为A可逆，所以A的行列式$|A|=3a-2\neq 0$，且A^*仍为可逆矩阵.

又因为α是矩阵A^*属于特征值λ的特征向量，所以，$\lambda\neq 0$

且，$A^*\alpha=\lambda\alpha$，$AA^*\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha$，$A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$，

即，α是矩阵A属于特征值$\frac{|A|}{\lambda}$的特征向量. 从而，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{cases} b+3 & =\frac{|A|}{\lambda} \\ 2b+2 & =\frac{|A|}{\lambda}b \\ 1+b+a & =\frac{|A|}{\lambda} \end{cases}$$

解得$a=2$，$b=1$或$b=-2$，$\lambda=\frac{|A|}{b+3}$，$|A|=3a-2=2$

当$b=1$时，$\lambda=\frac{|A|}{b+3}=1$,当$b=-2$时，$\lambda=\frac{|A|}{b+3}=4$.

03

23

已知平面上三条不同直线的方程分别是

$l_1: ax+2by+3c=0$; $l_2: bx+2cy+3a=0$; $l_3: cx+2ay+3b=0$,

证明：这三条直线交于一点的充要条件是$a+b+c=0$.

03

23

已知平面上三条不同直线的方程分别是

$l_1: ax+2by+3c=0$; $l_2: bx+2cy+3a=0$; $l_3: cx+2ay+3b=0$,

证明：这三条直线交于一点的充要条件是$a+b+c=0$.

证明：(充分性)

已知$a+b+c=0$，要证明三条直线交于一点，只要证明，

线性方程组$\begin{cases} ax & +2by & =-3c \\ bx & +2cy & =-3a \\ cx & +2ay & =-3b \end{cases}$ 有唯一的解.

03

由于$a+b+c=0$，所以方程组同解于$\begin{cases} ax & +2by & = -3c \\ bx & +2cy & = -3a \end{cases}$

方程组的系数行列式为$|A| = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 2b^2$.

由$a+b+c=0$得$b^2=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$，

$2ac=b^2-a^2-c^2$，$|A|=-(a^2+b^2+c^2)$.

又因为l_1是直线的方程，所以a,b,c不全为零，

$|A|\neq 0$，方程组有唯一解. 即，三条直线交于一点.

(必要性)

已知三条直线交于一点，要证明$a+b+c=0$.

03

因为三条直线交于一点，所以，

线性方程组$\begin{cases} ax & +2by & = -3c \\ bx & +2cy & = -3a \\ cx & +2ay & = -3b \end{cases}$ 有唯一的解.

其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩$= 2$，

所以，增广矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = -3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-b)^2] = 0.$$

由于l_1, l_2, l_3为三条不同直线，所以a, b, c不可能全等，

从而$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-b)^2 \neq 0$，所以$a + b + c = 0$.

04

24

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+I$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$I$是单位矩阵，则$B$的行列式$|B|=$____.

04

24

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+I$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$I$是单位矩阵，则$B$的行列式$|B|=$ ____.

答案： $\underline{\frac{1}{9}}$.

因为$|A|=3, A^*A=|A|I=3I$，所以，

$ABA^*A=2BA^*A+A,\ 3AB=6B+A$，

$|3A-6I||B|=|A|$,

所以，$|B|=\frac{1}{9}$.

04

25

设A为3阶方阵，将A的第1列与第2列交换得B，再把B的第2列加到第3列得C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q是：____.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案：$\underline{D}$.

04

由初等变换与初等矩阵之间的关系，Q为交换第1列与第2列，然后将第2列加到第3列对应的初等矩阵之积. 即，

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

04

由初等变换与初等矩阵之间的关系，Q为交换第1列与第2列，然后将第2列加到第3列对应的初等矩阵之积. 即，

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

26

设A,B是满足$AB=0$的任意两个非零矩阵，则必有___.

A.A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关；

B.A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关；

C.A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关；

D.A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

04

答案：$\underline{\ A\ }$.

因为AB的行向量是B的行向量的线性组合，AB的列向量是A的列向量的线性组合.

由$AB=0$且A,B均为非零矩阵，则，存在非零系数使得B的行向量组合为零，也存在非零系数使得A的列向量组合为零，

所以，选(A.).

04

27

设齐次线性方程组$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n & =0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n & =0 \\ \vdots \qquad \vdots & \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n & =0 \end{cases}$.

问a取何值时，该方程组有非零解，并求出通解.

04

27

设齐次线性方程组$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n & = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n & = 0 \end{cases}$.

问a取何值时，该方程组有非零解，并求出通解.

解：方程的系数行列式为

04

$$|A| = \begin{vmatrix} (1+a) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a \end{vmatrix}$$

将其最后一列乘(-1)加到最后前面各列，得

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & n-1 \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & n+a \end{vmatrix}$$

再将其各行都加到最后一行，得

04

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n(n+1)}{2} + a \end{vmatrix} = a^{n-1}[\frac{n(n+1)}{2} + a].$$

所以当$a = 0$或$a = -\frac{n(n+1)}{2}$时，$|A| = 0$，方程组有非零解.

$a = 0$时，方程组同解于$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$，

04

基础解系为$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \eta_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

通解为$\{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \ldots + k_{n-1}\eta_{n-1} | k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$是任意数$\}$.

当$a = -\frac{n(n+1)}{2}$时，对方程组的系数矩阵A实施初等行变换，

将第一行乘$-k$加到第k行，$k = 2, 3, \ldots, n$，得

04

$$A \to \begin{pmatrix} (1+a) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -(n-1)a & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ -na & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

再将第k行乘$\frac{1}{a}$，$k = 2, 3, ..., n$,得

$$A \to \begin{pmatrix} (1+a) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

04

方程组同解于

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 0 \\ \vdots & \\ -(n-1)x_1 + x_{n-1} & = 0 \\ -nx_1 + x_n & = 0 \end{cases}，基础解系为 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

此时，方程组的通解为$\left\{k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \middle| k\text{为任意数}\right\}$.

04

28

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

04

28

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

解：矩阵A的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

所以，

$a=-2$时，A有二重特征值$\lambda_1=2$,一重特征值$\lambda_2=6$;

04

$a=-\frac{2}{3}$时，A有二重特征值$\lambda_1=4$，一重特征值$\lambda_2=2$.

$a=-2$时，将二重特征值$\lambda_1=2$代入齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)X=0\text{得}\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =0 \end{cases}$$

有两个线性无关的解，A可相似对角化.

$a=-\frac{2}{3}$时，将二重特征值$\lambda_1=4$代入齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)X=0\text{得}\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +3x_3 & =0 \\ x_1 & & +3x_3 & =0 \\ -x_1 & +\frac{2}{3}x_2 & -x_3 & =0 \end{cases}$$

只有一个线性无关的解，A不可相似对角化.

05

29

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

若矩阵A的行列式$|A|=1$，则$|B|=$____.

05

29

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

若矩阵A的行列式$|A|=1$，则$|B|=$____.

答案：$\underline{2}$.

因为$B=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2.$

05

30

设λ_1, λ_2均是矩阵A的两个不同特征值，对应的特征向量分别是α_1, α_2，则，$\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是：____.

A.$\lambda_1 \neq 0$； B.$\lambda_2 \neq 0$； C.$\lambda_1 = 0$； D.$\lambda_2 = 0$.

05

30

设λ_1,λ_2均是矩阵A的两个不同特征值，对应的特征向量分别是α_1,α_2，则，$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是：____.

A.$\lambda_1\neq 0$；　B.$\lambda_2\neq 0$；　C.$\lambda_1=0$；　D.$\lambda_2=0$.

答案：$\underline{B}$.

因为任何方阵属于不同特征值的特征向量线性无关.所以

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=0.$

而$y_1\alpha_1+y_2A(\alpha_1+\alpha_2)=(y_1+y_2\lambda_1)\alpha_1+y_2\lambda_2\alpha_2,$

所以，$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关当且仅当

“由$(y_1+y_2\lambda_1)\alpha_1+y_2\lambda_2\alpha_2=0$可以得到$y_1=y_2=0.$”

05

又因为

$$(y_1 + y_2\lambda_1)\alpha_1 + y_2\lambda_2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 + y_2\lambda_1 = y_2\lambda_2 = 0,$$

所以选(B.).

05

又因为

$$(y_1+y_2\lambda_1)\alpha_1+y_2\lambda_2\alpha_2=0\Leftrightarrow y_1+y_2\lambda_1=y_2\lambda_2=0,$$

所以选(B.).

31

设A是$n\ (n>1)$阶可逆矩阵，交换A的第1行与第2行得矩阵B，A^*,B^*分别是A,B的伴随矩阵，则____.

A.交换A^*的第1列与第2列得B^*；

B.交换A^*的第1行与第2行得B^*；

C.交换A^*的第1列与第2列得$-B^*$；

D.交换A^*的第1行与第2行得$-B^*$.

05

答案： $\underline{C}$.

设P是交换第1行与第2行对应的初等矩阵，则$P^{-1}=P$，且$B=PA$. 而，

$|B|=|A||P|=-|A|$，$B^{-1}=A^{-1}P^{-1}$，

$|B|^{-1}B^*=|A|^{-1}A^*P^{-1}$，$-B^*=A^*P$，

P在右侧，交换A^*的列.

05

答案： $\underline{C}$.

设P是交换第1行与第2行对应的初等矩阵，则$P^{-1}=P$，且$B=PA$. 而，

$|B|=|A||P|=-|A|$，$B^{-1}=A^{-1}P^{-1}$，

$|B|^{-1}B^{*}=|A|^{-1}A^{*}P^{-1}$，$-B^{*}=A^{*}P$，

P在右侧，交换A^{*}的列.

32

已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为2. (1)求$a$的值；(2)求正交变换$X=QY$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形；(3)求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

05

解：(1)二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}，且A的秩r(A)=2.$$

所以，A的行列式$|A|=0$，即，

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix}=-4a=0，\ a=0.$$

所以，$a=0$时，二次型的秩为2.

(2)当$a=0$时，A有两个不同的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2$.

05

将$\lambda_1 = 0$带入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，

得A属于特征值$\lambda_1 = 0$的特征向量$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$；

将$\lambda_2 = 2$带入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得A属于

特征值$\lambda_1 = 2$的正交的特征向量$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

单位化得$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

05

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，

且$X=QY$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2y_2^2+2y_3^2$.

(3)因为$f(x_1,x_2,x_3)=0\Leftrightarrow 2y_2^2+2y_3^2=0\Leftrightarrow y_2=y_3=0$,

所以，$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中y_1是任意的.

05

33

已知3阶矩阵A的第一行是$(a \quad b \quad c)$, a, b, c不全为0，矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}，其中k是常数,且AB=0.$$

求线性方程组$AX=0$的通解.

05

33

已知3阶矩阵A的第一行是$(a\ \ b\ \ c), a, b, c$不全为0，矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}，其中k是常数,且AB=0.$$

求线性方程组$AX=0$的通解.

解：因为$AB=0$,所以矩阵B的列向量是其次线性方程组$AX=0$的解，秩满足$r(A)+r(B)\leq 3.$

而$r(A)\geq 1$，所以，$r(B)\leq 2.$

又因为$k\neq 9$时，$r(B)=2$，$k=9$时，$r(B)=1$，

05

所以，当$k\neq 9$时，$r(A)=1$，

$AX=0$有基础解系$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$，

通解是$\{l\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}|l,m$为任意数$\}$.

当$k=9$时，$r(B)=1$，则$r(A)=1$或$r(A)=2$.

若$r(A)=1$，方程组$AX=0$同解于$ax_1+bx_2+cx_3=0$.

05

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$是其一个解. $a+2b+3c=0.$

又因为a,b,c不全为0，不妨设$a\neq 0$，从而

$\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$是$AX=0$的另一个解，且与$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$线性无关，

即，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系，

05

$AX=0$的通解是$\left\{l\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}\middle|\, l,m\text{为任意数}\right\}$.

若$r(A)=2$，则$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系，

通解为$\left\{l\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\middle|\, l\text{为任意数}\right\}$.

05

34

确定常数a，使得向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$可以由向量组$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}$线性表出，但向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

05

解：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 为列，构作3×6矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix}$$，初等行变换，化为阶梯形，

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 & 6+3a & 2+4a \end{pmatrix},$$

若$a\neq 1$且$a\neq -2$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$所在的列都有主元，线性无关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，不符合要求。

所以，只要讨论$a=1$或者$a=-2$的情况。

05

$a=1$时，阶梯形矩阵为$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$，

满足：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出，且$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

$a=-2$时，$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$，

满足：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出，且$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

$a=-2$不符合要求. 所以，$a=1$.

06

35

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$I$是2阶单位矩阵，

矩阵B满足$BA=B+I$，则B的行列式为$|B|=$____.

06

35

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$I$是2阶单位矩阵，矩阵$B$满足$BA=B+I$，则$B$的行列式为$|B|=$____.

答案：$\underline{\ 2\ }$.

因为B满足$BA=B+I$，所以，$|B||(A-I)|=|2I|$，而$|A-I|=2, |2I|=4$，所以，$|B|=2$.

06

36

设$\alpha_1, ..., \alpha_r$均为n维列向量，A是$m \times n$矩阵，则下列选项正确的是：____.

A.$\alpha_1, ..., \alpha_r$线性相关，则$A\alpha_1, ..., A\alpha_r$线性相关；

B.$\alpha_1, ..., \alpha_r$线性相关，则$A\alpha_1, ..., A\alpha_r$线性无关；

C.$\alpha_1, ..., \alpha_r$线性无关，则$A\alpha_1, ..., A\alpha_r$线性相关；

D.$\alpha_1, ..., \alpha_r$线性无关，则$A\alpha_1, ..., A\alpha_r$线性无关.

06

36

设$\alpha_1,...,\alpha_r$均为n维列向量，A是$m\times n$矩阵，则下列选项正确的是：____.

A.$\alpha_1,...,\alpha_r$线性相关，则$A\alpha_1,...,A\alpha_r$线性相关；

B.$\alpha_1,...,\alpha_r$线性相关，则$A\alpha_1,...,A\alpha_r$线性无关；

C.$\alpha_1,...,\alpha_r$线性无关，则$A\alpha_1,...,A\alpha_r$线性相关；

D.$\alpha_1,...,\alpha_r$线性无关，则$A\alpha_1,...,A\alpha_r$线性无关.

答案：$\underline{\ A\ }$.

因为由$x_1\alpha_1+...x_r\alpha_r=0$，可以得到

$$x_1A\alpha_1+...x_rA\alpha_r=A(x_1\alpha_1+...x_r\alpha_r)=0.$$

所以，选A.

06

37

设A是3阶矩阵，将A的第2行加到第1行得B，将B的第1列的-1倍加到第2列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则___.

A.$C=P^{-1}AP$；B.$C=PAP^{-1}$；C.$C=P^TAP$；D.$C=PAP^T$.

06

37

设A是3阶矩阵，将A的第2行加到第1行得B，将B的第1列的-1倍加到第2列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则____.

A.$C=P^{-1}AP$；B.$C=PAP^{-1}$；C.$C=P^TAP$；D.$C=PAP^T$.

答案：$\underline{B}$.

因为P是第2行加到第1行对应的初等矩阵，P^{-1}是第1列的-1倍加到第2列对应的初等矩阵，而对矩阵实施初等行变换就相当于在矩阵的左侧乘上相应的初等矩阵，对矩阵实施初等列变换就相当于在矩阵的右侧乘上相应的初等矩阵.

06

38

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &= -1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4 &= -1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4 &= 1 \end{cases}$有3个线性无关的解.

(1)证明方程组的系数矩阵A的秩$r(A)=2$;

(2)求a,b的值以及方程组的通解.

06

38

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 & =-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4 & =-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4 & =1 \end{cases}$ 有3个线性无关的解.

(1)证明方程组的系数矩阵A的秩$r(A)=2$;

(2)求a,b的值以及方程组的通解.

解：(1)因为线性方程组有3个线性无关的解，

记为X_1,X_2,X_3.则X_1-X_2,X_1-X_3是其导出齐次线性方程组的2个线性无关的解.

所以，导出齐次线性方程组的基础解系所含解的个数≥ 2,

06

即，$4-r(A)\geq 2$，$r(A)\leq 2$.

又，A有2阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$，所以，$r(A)\geq 2$。

所以，$r(A)=2$.

(2)将方程组的增广矩阵实施初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 & 4-2a \end{pmatrix},$$

06

所以，$r(A)=2 \Leftrightarrow a=2, b=3$，

方程组同解于$\begin{cases} x_1+2x_3-4x_4 & =2 \\ x_2-x_3+5x_4 & =-3 \end{cases}$

有特解：$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；导出组的基础解系是$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

通解为：$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \forall k, l \right\}$.

06

39

设3阶实对称矩阵A的各行元素和均为3，向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$ 是线性方程组$AX=0$的两个解.

(1)求A的特征值和特征向量；

(2)求正交矩阵Q和对角矩阵B，使得$Q^TAQ=B$.

06

39

设3阶实对称矩阵A的各行元素和均为3，向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$ 是线性方程组$AX=0$的两个解.

(1)求A的特征值和特征向量；

(2)求正交矩阵Q和对角矩阵B，使得$Q^TAQ=B$.

解：(1)因为α_1,α_2是线性方程组$AX=0$的解，

所以，$A\alpha_1=0=0\alpha_1,A\alpha_2=0=0\alpha_2$，

即，0是矩阵A的一个特征值，且α_1,α_2是矩阵A属于特征值0的两个线性无关的特征向量.

06

又因为A每一行的元素之和均为3，所以，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$，即，3是A的一个特征值，

且，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是$A$属于特征值3的特征向量.

(2)将α_1,α_2正交化，得A属于特征值0的两个正交的特征向量

$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，单位化得$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，

06

将α_3单位化得$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

构作正交矩阵$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

则$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B$.

07

40

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A^3$的秩为$r(A^3)=$____.

07

40

设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则$A^3$的秩为$r(A^3)=$_____.

答案：$\underline{\ 1\ }$.

计算得：$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以，$r(A)=1$.

07

41

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是：____.

A.$\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$；　B.$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$；

C.$\alpha_1-2\alpha_2, \alpha_2-2\alpha_3, \alpha_3-2\alpha_1$；　D.$\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_3+2\alpha_1$.

07

41

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是：____.

A.$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$； B.$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$；

C.$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$； D.$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

答案： $\underline{A}$.

因为，$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$.
所以，选A.

07

42

设$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$___.

A.合同且相似；　B.合同但不相似；

C.不合同但相似；　D.不合同且不相似.

07

42

设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$A$与$B$___.

A.合同且相似；　B.合同但不相似；

C.不合同但相似；　D.不合同且不相似.

答案：$\underline{B}$.

因为A的2阶顺序主子阵$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$是正定的，且$|A|=0$，

所以，A是秩为2的半正定矩阵，A与B合同.

又因为，A的特征多项式$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，

所以，A与B的特征值不相同，A与B不相似.

07

43

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+ax_3 &= 0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &= 0 \end{cases}$与方程组

$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求a的值及所有的公共解.

07

43

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+ax_3 &= 0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &= 0 \end{cases}$ 与方程组 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求a的值及所有的公共解.

解：因为两个线性方程组有公共解

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+ax_3 &= 0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_3 &= a-1 \end{cases}$$ 有解，且其解即为公共解.

又因为其增广矩阵经过初等行变换化为阶梯阵得到

07

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix},$$

所以它们有公共解当且仅当$a=1$或$a=2$.

当$a=1$时，它们的公共解为$\left\{ \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \middle| \forall k \right\}$.

07

$a=2$时，它们的公共解为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

07

$a=2$时，它们的公共解为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

44

设3阶对称矩阵A的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$.

$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$A$属于$\lambda_1$的一个特征向量.

记$B=A^5-4A^3+I$，其中I为3阶单位阵.

(1) 验证α_1是矩阵B的特征向量，并求B的全部特征值的特征向量；(2)求矩阵B.

07

解：(1) 因为α_1是矩阵A属于特征值1的特征向量，

所以，$A\alpha_1=\alpha_1$，$A^5\alpha_1=\alpha_1$，$A^3\alpha_1=\alpha_1$.

所以，$B\alpha_1=(A^5-4A^3+I)\alpha_1=-2\alpha_1$，

即，α_1是矩阵B属于特征值-2的特征向量.

设α_2,α_3为矩阵A分别属于特征值λ_2,λ_3的特征向量.

则，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$，$A^5\alpha_2=32\alpha_2$，

$A^3\alpha_2=8\alpha_3$，$A^5\alpha_3=-32\alpha_2$，$A^3\alpha_3=-8\alpha_3$. 所以，

$B\alpha_2=(A^5-4A^3+I)\alpha_2=\alpha_2$，$B\alpha_3=(A^5-4A^3+I)\alpha_3=\alpha_3$.

即$k_1\alpha_2+k_2\alpha_3\neq 0$是矩阵$B$属于特征值1的特征向量.

由于A是对称矩阵，所以B也是对称矩阵.

对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.

07

设$\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$为$B$属于特征值1的特征向量，

则，$x_1 - x_2 + x_3 = 0$，所以，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$是$B$属于特征值1的线性无关的特征向量.

所以，B属于特征值-2的全部特征向量为

$$\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k \neq 0 \right\}.$$

07

属于特征值1的全部特征向量为

$$\left\{ \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \\ -k_2 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{不全为零} \right\}.$$

(2)记$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，

则，$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

07

求得$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

所以，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

08

45

设A为2阶矩阵.α_1,α_2为线性无关的2维向量，

$A\alpha_1=0,\ A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$, 则$A$的非零特征值为____.

08

45

设A为2阶矩阵.α_1,α_2为线性无关的2维向量，
$A\alpha_1=0,\ A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$, 则$A$的非零特征值为____.

答案： $\underline{\ 1\ }$.

因为α_1,α_2为线性无关的2维向量，所以$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0.$

又，$A\alpha_1=0$，$A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，

所以，α_1是矩阵A属于特征值0的特征向量，

$2\alpha_1+\alpha_2$是矩阵A属于特征值1的特征向量.

再，A是2阶矩阵，所以，A只有两个特征值，
从而，A的非零特征值为1.

08

46

3阶矩阵A的特征值为$\lambda, 2, 3$，其中$\lambda \neq 2, 3$,且A的行列式$|A| = 24$,则$\lambda =$ _____.

08

46

3阶矩阵A的特征值为$\lambda, 2, 3$，其中$\lambda \neq 2, 3$,且A的行列式$|A| = 24$, 则$\lambda =$ ____.

答案： $\underline{\ 4\ }$.

因为方阵的行列式等于特征值之积，

即，$|A| = \lambda \times 2 \times 3 = 24$. 所以，$\lambda = 4$.

08

46

3阶矩阵A的特征值为$\lambda, 2, 3$，其中$\lambda \neq 2, 3$,且A的行列式$|A| = 24$,
则$\lambda =$ ____.

答案：$\underline{\ 4\ }$.

因为方阵的行列式等于特征值之积，
即，$|A| = \lambda \times 2 \times 3 = 24$. 所以，$\lambda = 4$.

47

设3阶矩阵A的特征值互不相同.若A的行列式$|A| = 0$,
则A的秩$r(A) =$ ____.

08

46

3阶矩阵A的特征值为$\lambda, 2, 3$，其中$\lambda \neq 2, 3$,且A的行列式$|A| = 24$,
则$\lambda =$ ____.

答案： $\underline{4}$.

因为方阵的行列式等于特征值之积，
即，$|A| = \lambda \times 2 \times 3 = 24$. 所以，$\lambda = 4$.

47

设3阶矩阵A的特征值互不相同.若A的行列式$|A| = 0$，
则A的秩$r(A) =$ ____.

答案： $\underline{2}$.

因为A的特征值互不相同，所以A相似于对角阵.

08

又因为相似矩阵有相同的秩和行列式，且对角阵的行列式等于对角元的乘积，

所以，A有一个零特征值和2个非零特征值，从而A的秩$r(A) = 2$.

08

又因为相似矩阵有相同的秩和行列式，且对角阵的行列式等于对角元的乘积，

所以，A有一个零特征值和2个非零特征值，从而A的秩$r(A) = 2$.

48

设A是n阶方阵，I是n阶单位矩阵.若$A^3 = 0$,则____.

A.$I - A$不可逆，$I + A$不可逆；B.$I - A$不可逆，$I + A$可逆；

C.$I - A$可逆，$I + A$可逆；　　D.$I - A$可逆，$I + A$不可逆.

08

又因为相似矩阵有相同的秩和行列式，且对角阵的行列式等于对角元的乘积，

所以，A有一个零特征值和2个非零特征值，从而A的秩$r(A)=2$.

48

设A是n阶方阵，I是n阶单位矩阵.若$A^3=0$,则____.

A.$I-A$不可逆，$I+A$不可逆；B.$I-A$不可逆，$I+A$可逆；

C.$I-A$可逆，$I+A$可逆；　　D.$I-A$可逆，$I+A$不可逆.

答案：$\underline{C}$.

$$(I-A)(I+A+A^2)=I-A^3=I,$$

$$(I+A)(I-A+A^2)=I+A^3=I.$$

08

49

设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，在实数域上与$A$合同的矩阵是____.

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$； B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$； D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

08

49

设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，在实数域上与$A$合同的矩阵是____.

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$； B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$； D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

答案：$\underline{D}$.

因为实对称矩阵$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$的合同标准型是$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$；

08

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\text{的合同标准型是}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\text{的合同标准型是}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\text{的合同标准型是}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\text{的合同标准型是}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

08

50

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，

方程组$AX=B$，其中$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

08

50(续)

(1)证明$|A| = (n+1)a^n$；

(2)a为何值时，方程组有唯一解，并求唯一解X；

(3)a为何值时，方程组有无穷多解，求通解.

08

解：(1)归纳法.记n阶矩阵A的行列式为$D_n = |A|$. $n = 1$时，结论显然成立.

假设对阶数$k \leq n$的矩阵A，都有$D_k = (k+1)a^k$.

则，对$n+1$阶矩阵A的行列式D_{n+1}，按最后一列展开，得递推关系式

$$D_{n+1} = 2aD_n - a^2 D_{n-1} =$$

$$2a[(n+1)a^n] - a^2[(n-1+1)a^{n-1}] = (n+2)a^{n+1}.$$

即，对$n+1$阶矩阵A，结论仍然成立.

由归纳法原理，结论对所有的矩阵A均成立.

(2)当$a \neq 0$时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解.

08

记$|A_k|$为$|A|$的第k列用B替换所得到的行列式，即

$$|A_k| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

08

$$= (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

08

$$= (-1)^{k+1}(a^2)^{k-1}D_{n-k} = (-1)^{k+1}(a^2)^{k-1}(n-k+1)a^{n-k},$$

$k = 1, 2, ..., n.$

由克莱姆法则，可得方程组的解为

$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} = \frac{(-1)^{k+1}(n-k+1)a^{k-2}}{n+1}$, $k = 1, 2, ..., n.$

(3)当$a = 0$时，方程组系数矩阵A的秩等于$n-1$等于增广矩阵的秩，方程组有无穷多组解.

导出组基础解系$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，特解$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，

08

方程组的通解为$\{X_0 + k\xi_0 | \forall k\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \forall k \right\}.$

08

方程组的通解为$\{X_0+k\xi_0|\forall k\}=\left\{\begin{pmatrix}k\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}|\forall k\right\}.$

51

设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

(2)记$P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$是以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列向量的矩阵，求$P^{-1}AP$.

08

解：(1)因为α_1,α_2为A的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，

所以，$A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$.

考虑$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的组合$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=$$

$$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

所以，$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$.

又因为，α_1,α_2为A的分别属于特征值$-1,1$的特征向量，

所以，α_1,α_2线性无关，从而，$2k_1=-k_3=0$，

所以，$k_2\alpha_2=0$，而特征向量非零，即，$\alpha_2\neq 0$，$k_2=0$，

由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可以得到$k_1=k_2=k_3=0$，

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

08

(2) 因为

$$AP = A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

08

52

设$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, α,β为三维列向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置.

证明：(1)$r(A)\le 2$；(2)若α,β线性相关，则$r(A)<2$.

08

52

设$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, α,β为三维列向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置.

证明：(1)$r(A)\le 2$；(2)若α,β线性相关，则$r(A)<2$.

证明：(1)因为α,β是三维列向量，所以，三阶方阵$(\alpha\alpha^T)$的列都是α 与一个数的数积，$r(\alpha\alpha^T)\le 1$，同样，$r(\beta\beta^T)\le 1$.

又因为两个矩阵和的秩不大于它们秩的和，所以，

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le 2.$$

(2)若α,β线性相关，则其中一个向量可以由另一个线性表出.不妨设$\beta=k\alpha$，则$\beta\beta^T=(k\alpha)(k\alpha)^T=k^2(\alpha\alpha^T)$，

所以，$A=(1+k^2)(\alpha\alpha^T), r(A)\le 1<2$.

09

53

若3维向量α，β满足$\alpha^T\beta=2$，其中α^T为α的转置.则矩阵$\beta\alpha^T$的非零特征值为____.

09

53

若3维向量α，β满足$\alpha^T\beta=2$，其中α^T为α的转置.则矩阵$\beta\alpha^T$的非零特征值为____.

答案：$\underline{\ 2\ }$.

因为，矩阵$\beta\alpha^T$的秩为1，所以，$\beta\alpha^T$只有一个非零特征值.

又因为，矩阵A的特征值之和等于其主对角元之和，

而$\beta\alpha^T$的主对角元之和等于$\alpha^T\beta=2$，

所以，$\beta\alpha^T$的非零特征值为2.

09

54

设α, β为3维列向量，β^T为β的转置.

若$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$\beta^T\alpha =$ ____.

09

54

设α, β为3维列向量，β^T为β的转置.

若$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$\beta^T\alpha = $____.

答案： $\underline{\ 2\ }$.

因为，相似矩阵有相同的迹.

且，$\beta^T\alpha$等于$\alpha\beta^T$的对角元素之和，

所以，$\beta^T\alpha$等于$\alpha\beta^T$的迹$= 2$.

09

55

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵是____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

09

55

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵是___.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

答案： $\underline{A}$.

09

因为,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = \alpha_1 + 2(\frac{1}{2}\alpha_2) \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = 2(\frac{1}{2}\alpha_2) + 3(\frac{1}{3}\alpha_3) \\ \alpha_3 + \alpha_1 & = \alpha_1 + 3(\frac{1}{3}\alpha_3) \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_2 & \frac{1}{3}\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

09

56

设A,B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别是矩阵A,B的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵是___.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$；B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$；D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$.

09

56

设A, B均为2阶矩阵，A^*, B^*分别是矩阵A, B的伴随矩阵，若$|A| = 2, |B| = 3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵是___.

A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$；B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$；D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$.

答案：$\underline{B}$.

09

因为对任意可逆矩阵C，$C^{-1}=|C|^{-1}C^*$，又因为，

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A||B|}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=|A||B|\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & |A|B^* \\ |B|A^* & 0 \end{pmatrix}.$$

09

57

设A,P均为3阶矩阵，P^T为P的转置，

且$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^TAQ=$ ____.

A. $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$； B. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$； D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

09

答案：$\underline{A}$.

因为$Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

所以，$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^TAP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

09

58

设$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(1)求满足$A\xi_2=\xi_1$, $A^2\xi_3=\xi_1$的所有向量ξ_2,ξ_3;

(2)对(1)中的任意向量ξ_2,ξ_3,证明:ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

58

设$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

(1)求满足$A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$的所有向量ξ_2,ξ_3；

(2)对(1)中的任意向量ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

解：(1)解方程组$AX=\xi_1$.

对方程组的增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换化为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

09

所以，$\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$，其中，$k_1$为任意数.

又因为，$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$，所以，

方程组$A^2X = \xi_1$的增广矩阵经过初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

09

所以，$\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k_2 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$，其中，$k_2, k_3$为任意数.

(2)因为对任意的k_1, k_2, k_3，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} - k_2 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_1 & k_2 \\ 2 & k_1 & k_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

所以，对任意的ξ_2, ξ_3，都有ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关.

09

59

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(2)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$，求a的值.

09

59

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(2)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$，求a的值.

(1)二次型f的矩阵为$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$,

特征多项式$|\lambda I-A|=(\lambda-a)(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)$.

所以，A的所有特征值为$a,a+2,a-1$.

(2) 因为二次型的规范形为$y_1^2+y_2^2$,

所以，A的秩为2，且正惯性指数为2,

即，A有两个正的特征值，一个0特征值.从而，$a=1$.

09

60

设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$；

若存在3阶非零矩阵B，使得$AB=0$，

(1)求a的值；(2)求方程组$AX=0$的通解.

09

60

设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$;

若存在3阶非零矩阵B，使得$AB=0$,

(1)求a的值；(2)求方程组$AX=0$的通解.

解：(1)因为存在非零矩阵B，使得$AB=0$,

所以，A的行列式$|A|=0$.而，$|A|=a(a-2)$,

所以，$a=0$或$a=2$.

(2) $a=0$时，$AX=0$同解于$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 & =0 \\ x_3 & =0 \end{cases}$,

09

$$通解为\left\{\begin{pmatrix}-2k\\k\\0\end{pmatrix}\middle| k为任意数\right\}.$$

$$a=2时，AX=0同解于\begin{cases}x_1+2x_2+x_3&=0\\x_2+x_3&=0\end{cases}$$

$$通解为\left\{\begin{pmatrix}k_1\\-k_1\\k_1\end{pmatrix}\middle| k_1为任意数\right\}.$$

09

61

设3阶矩阵A的特征值为$1, 1, -2$,对应的特征向量依次为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1)求矩阵A；(2)求A^{2009}.

09

61

设3阶矩阵A的特征值为$1,1,-2$,对应的特征向量依次为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(1)求矩阵A;(2)求A^{2009}.

(1)3阶方阵A有三个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

09

则，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，从而，

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

09

$$(2)A^{2009} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{2009} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2^{2008} & 0 & \frac{1}{2} + 2^{2008} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + 2^{2008} & 0 & \frac{1}{2} - 2^{2008} \end{pmatrix}.$$

10

62

设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times m$矩阵，I是m阶单位矩阵，

若$AB = I$，则___.

A.秩$r(A) = m$，秩$r(B) = m$；B.秩$r(A) = m$，秩$r(B) = n$；
C.秩$r(A) = n$，秩$r(B) = m$； D.秩$r(A) = n$，秩$r(B) = n$.

10

62

设A是$m \times n$矩阵，B是$n \times m$矩阵，I是m阶单位矩阵，

若$AB = I$，则___.

A.秩$r(A) = m$，秩$r(B) = m$；B.秩$r(A) = m$，秩$r(B) = n$；
C.秩$r(A) = n$，秩$r(B) = m$； D.秩$r(A) = n$，秩$r(B) = n$.

答案： $\underline{A}$.

因为，A是$m \times n$矩阵，B是$n \times m$矩阵，

所以，$r(A) \leq m$, $r(B) \leq m$，

而，$m = r(AB) \leq r(A), m = r(AB) \leq r(B)$，

所以，$r(A) = r(B) = m$.

10

63

设A是4阶对称矩阵，且$A^2+A=0$，若A的秩为3，则A相似于____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$；　B. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$；　D. $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

10

答案：$\underline{\ D\ }$.

因为，A相似于对角阵D，

所以，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=D$，所以，

$$D^2+D=(P^{-1}AP)^2+P^{-1}AP=P^{-1}(A^2+A)P=0.$$

10

答案：$\underline{\ D\ }$.

因为，A相似于对角阵D，

所以，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = D$，所以，

$D^2 + D = (P^{-1}AP)^2 + P^{-1}AP = P^{-1}(A^2 + A)P = 0.$

64

设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，

若由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$形成的向量空间的维数是2，则$a = \underline{\quad\quad}$.

10

答案： $\underline{6}$

因为由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$形成的向量空间的维数是2，也就是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩是2.

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵，并初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩是2$\Leftrightarrow a=6$.

10

65

设向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$可以由向量组$II$：$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$线性表出.下列命题正确的是____.

A.若向量组I线性无关，则$r\le s$；

B.若向量组I线性相关，则$r>s$；

C.若向量组II线性无关，则$r\le s$；

D.若向量组II线性相关，则$r>s$.

10

65

设向量组I：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$可以由向量组$II$：$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$线性表出.下列命题正确的是___.

A.若向量组I线性无关，则$r \leq s$；

B.若向量组I线性相关，则$r > s$；

C.若向量组II线性无关，则$r \leq s$；

D.若向量组II线性相关，则$r > s$.

答案：$\underline{\ A\ }$

向量组向量个数多的被向量个数少的线性表出，多的一定线性相关.

且逆命题不成立.

10

66

设A, B为3阶矩阵，且$|A| = 3$，$|B| = 2$，$|A^{-1} + B| = 2$，

则$|A + B^{-1}| = $ ____.

10

66

设A, B为3阶矩阵，且$|A| = 3$, $|B| = 2$, $|A^{-1} + B| = 2$,
则$|A + B^{-1}| = ____$.

答案： $\underline{\ 3\ }$

因为，$|A||A^{-1} + B| = |A(A^{-1} + B)| = |I + AB| = 6$,

且，$|A + B^{-1}||B| = |(A + B^{-1})B| = |AB + I| = 6$,

所以，$|A + B^{-1}| = 3$.

10

67

设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

已知线性方程组$AX=b$存在两个不同的解.

(1)求λ，a；(2)求方程组$AX=b$的通解.

10

67

设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

已知线性方程组$AX=b$存在两个不同的解.

(1)求λ，a；(2)求方程组$AX=b$的通解.

解：(1)方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}$，

经初等行变换，$\overline{A}$化为

10

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{pmatrix},$$

$AX=b$有两个不同的解，所以，

$$\begin{cases} \lambda \neq 1\ (\lambda = 1\text{方程组无解}) \\ 1-\lambda^2 = 0\ (\neq 0\text{方程组解唯一}) \\ a-\lambda+1 = 0\ (\neq 0\text{方程组无解}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

(2)方程组同解于$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ -2x_2 & = 1 \end{cases}$,

10

有一个特解$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

通解为$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

10

68

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$在正交变换$X=QY$下的标准型是$y_1^2+y_2^2$，且Q的第三列是$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵A；

(2)证明$A+I$是正定矩阵，其中I是3阶单位矩阵.

10

68

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$在正交变换$X=QY$下的标准型是$y_1^2+y_2^2$，且Q的第三列是$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵A；

(2)证明$A+I$是正定矩阵，其中I是3阶单位矩阵.

解：(1)因为Q是正交矩阵，

所以，Q的列向量是两两正交的单位向量.

10

假设Q的未知列向量为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则，

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + 0x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 0 \text{ (列向量相互正交)} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \text{ (列向量为单位向量)} \end{cases}$$

可以解得Q的另外两个列向量为$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

所以，$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$，且$Q^TAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

10

$$A=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(2)因为A相似于(合同于)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以，$A+I$相似于(合同于)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，是正定矩阵.

10

69

设$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，若第1列为$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$的正交矩阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵，求$a$，$Q$.

10

69

设$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，若第1列为$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$的正交矩阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵，求$a$，$Q$.

解：因为Q是正交矩阵，所以，$Q^T=Q^{-1}$，

又因为Q^TAQ是对角阵，

所以，Q的列向量是矩阵A的特征向量，即，

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}，解得\lambda=2，a=-1.$$

10

矩阵A的特征多项式

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-5)(\lambda-2),$$

有特征值$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=2.$

$\lambda_2=5$带入$(\lambda I-A)X=0$得$\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$,

有非零解$\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，单位化得$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$;

10

$\lambda_1=-4$带入$(\lambda I-A)X=0$得$\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$,

有非零解$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$;

$\lambda_3=2$的单位特征向量为$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

11

70

设A为3解矩阵，将A的第2列加到第1列得矩阵B，再交换B的第2行与第3行得单位矩阵，记

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$，则$A=$___.

A.P_1P_2； B.$P_1^{-1}P_2$； C.P_2P_1； D.$P_2P_1^{-1}$.

70

设A为3解矩阵，将A的第2列加到第1列得矩阵B，再交换B的第2行与第3行得单位矩阵，记

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$，则$A=$____.

A.P_1P_2； B.$P_1^{-1}P_2$； C.P_2P_1； D.$P_2P_1^{-1}$.

答案：D.

因为初等列变换，就是在矩阵的右侧乘相应的初等矩阵；初等行变换，就是在矩阵的左侧乘相应的初等矩阵。

所以，$P_2AP_1=I$，$A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$.

11

71

设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$是4阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系，则$A^*X=0$的基础解系可为___.

A.α_1,α_2； B.α_1,α_3； C.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； D.$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

11

71

设$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$是4阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系，则$A^*X=0$的基础解系可为___.

A.α_1,α_2； B.α_1,α_3； C.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； D.$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

答案： D .

因为α是$AX=0$的基础解系，

所以，$r(A)=3$，且，$\alpha_1+\alpha_3=0$，

11

又因为，$A^*A=AA^*=|A|I=0$，

所以，$r(A^*)=1$，A的列向量是$A^*X=0$的解，

且，$A^*X=0$的基础解系含三个解.

A的三个线性无关的列向量构成$A^*X=0$的基础解系.

而，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

所以，基础解系是$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

11

又因为，$A^*A = AA^* = |A|I = 0$，

所以，$r(A^*) = 1$，A的列向量是$A^*X = 0$的解，

且，$A^*X = 0$的基础解系含三个解.

A的三个线性无关的列向量构成$A^*X = 0$的基础解系.

而，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，

所以，基础解系是$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

72

若二次曲面的方程$x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$，经正交变换化为$y_1^2 + 4z_1^2 = 4$，则$a =$ ___.

11

又因为，$A^*A = AA^* = |A|I = 0$，

所以，$r(A^*) = 1$，A的列向量是$A^*X = 0$的解，

且，$A^*X = 0$的基础解系含三个解.

A的三个线性无关的列向量构成$A^*X = 0$的基础解系.

而，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，

所以，基础解系是$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

72

若二次曲面的方程$x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$，经正交变换化为$y_1^2 + 4z_1^2 = 4$，则$a =$ ___.

答案：1.

11

二次曲面方程相应的二次型$x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$

相应的矩阵是$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

因为经正交变换化为$y_1^2+4z_1^2=4$，所以，$r(A)=2$，$|A|=0$.

而，$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2$，所以，$a=1$.

11

73

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，则$f$的正惯性指数是____.

11

73

二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，则$f$的正惯性指数是___.

答案： $\underline{\ 2\ }$.

正惯性指数等于二次型矩阵的正特征值个数。f的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}，特征多项式\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$，有两个正特征值.正惯性指数等于2.

11

74

设A是4×3矩阵，η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组$AX=\beta$的3个线性无关的解，k_1,k_2为任意数，则$AX=\beta$的通解为___.

A. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$；　B. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$；

C. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$；　D. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$.

11

74

设A是4×3矩阵，η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组$AX=\beta$的3个线性无关的解，k_1,k_2为任意数，则$AX=\beta$的通解为___.

A. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$；　B. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$；

C. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$；　D. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$.

答案： $\underline{C}$.

A是4×3矩阵，$AX=0$基础解系至多含两个解. η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组$AX=\beta$的3个线性无关的解，所以，$\eta_3-\eta_1$，$\eta_2-\eta_1$是$AX=0$的基础解系，且，$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}$是$AX=\beta$的一个解，所以，通解是$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$.

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

11

75

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$的秩为1，A中行元素之和为3，则f在正交变换下$X=QY$的标准型为___.

11

75

设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = X^TAX$的秩为1，A中行元素之和为3，则f在正交变换下$X = QY$的标准型为____.

答案：$\underline{3y_1^2}$.

二次型的秩等于2，A只有一个非零特征值，

又因为，A的每行元素之和等于3，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

3是A的唯一非零特征值，

所以，正交变换之下的标准型只有一项非零，且系数为3.

11

76

设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$不能由向量组

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$线性表出.

(1)求a的值；(2)将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

11

76

设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$不能由向量组

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$线性表出.

(1)求a的值；(2)将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解：(1)以$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵，并进行初等行变换，化为阶梯形，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$不能由$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表出，得$a = 5$.

(2)以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$为列构作矩阵，进行初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

得$\begin{cases} \beta_1 & = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 & = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 \\ \beta_3 & = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3 \end{cases}.$

11

77

A为3阶实对称矩阵，A的秩为2，且$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

求(1)A的特征值与特征向量；(2)矩阵A.

11

77

A为3阶实对称矩阵，A的秩为2，且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

求(1)A的特征值与特征向量；(2)矩阵A.

解：因为矩阵A的秩$r(A)=2$，所以A有特征值$\lambda_1=0$，

又因为$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，

11

所以，$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

即，A有特征值$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$. 且属于特征值

$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$的特征向量分别是$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

因为A是实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量正交.

设矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

11

则$\begin{cases} x_1+0x_2-x_3=0 \\ x_1+0x_2+x_3=0 \end{cases}$，属于$\lambda_1=0$的特征向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

取$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

11

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12

78

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的是____.

A.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； B.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$； C.$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$； D.$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

12

78

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的是___.

A.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； B.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$； C.$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$； D.$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

答案：$\underline{C}$.

$c_1\neq 0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$也线性无关；

$c_3+c_4\neq 0$时，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关；

12

79

设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，

则$Q^{-1}PQ=$____.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12

79

设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

$P=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}PQ=$____.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答案：$\underline{B}$.

12

因为$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以$AP=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

$A\alpha_1=\alpha_1,\ A\alpha_2=\alpha_2,\ A\alpha_3=2\alpha_3$，

即，α_1,是矩阵A属于特征值$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量，

α_3矩阵A属于特征值$\lambda_2=3$的特征向量，

所以，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$也矩阵$A$属于特征值$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量，

$$AQ=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

12

80

设X是3维单位向量，I是3阶单位矩阵，则$I-XX^T$的秩是____.

12

80

设X是3维单位向量，I是3阶单位矩阵，则$I - XX^T$的秩是____.

答案：$\underline{2}$.

因为X是3维单位向量，所以，$X^TY = 0$有两个线性无关的解，记为Y_1, Y_2，则X, Y_1, Y_2线性无关.

以X, Y_1, Y_2为列构作矩阵$P = (X \ \ Y_1 \ \ Y_2)$，则P可逆，且

$$(I - XX^T)P = (I - XX^T)(X \ \ Y_1 \ \ Y_2)$$

$$= \left((I - XX^T)X \quad (I - XX^T)Y_1 \quad (I - XX^T)Y_2\right)$$

$$= \left(0X \quad Y_1 \quad Y_2\right) = (X \ \ Y_1 \ \ Y_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12

81

设A为3阶方阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第1行与第2行得矩阵B，则$|BA^*|=$____.

12

81

设A为3阶方阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第1行与第2行得矩阵B，则$|BA^*|=$___.

答案：$\underline{-27}$.

因为$B=P(1,2)A$，且$AA^*=|A|I$，所以，

$$|BA^*|=|P(1,2)AA^*|=|P(1,2)||AA^*|=(-1)||A|I|$$
$$=(-1)|A|^3=-27.$$

12

82

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

求(1)$|A|$；

(2)已知线性方程组$AX=b$有无穷多解，求a，$AX=b$的通解.

12

82

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

求(1)$|A|$；

(2)已知线性方程组$AX=b$有无穷多解，求a，$AX=b$的通解.

解：(1)按第1列展开计算

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

12

(2)对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a(1+a) \end{pmatrix},$$

方程有无穷多解，$\Leftrightarrow a = -1.$

$a = -1$时，

方程组有一个特解 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

12

$$\text{通解是:}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意数}\right\}.$$

12

通解是：$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

83

三阶矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，$A^T$为矩阵$A$的转置，
已知$r(A^TA) = 2$，且二次型$f = X^TA^TAX$.
(1)求a；(2)求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程.

12

解：(1)$A^TA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{pmatrix}$，
$r(A^TA)=2$，$|A^TA|=(3+a^2)(a+1)^2=0$，$a=-1$.

(2)二次型的矩阵$A^TA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

特征多项式$|\lambda I-A^TA|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$.

12

特征值为$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$，

将$\lambda_1 = 0$带入$(\lambda I - A^T A)X = 0$，

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0，\text{得特征向量} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}，$$

将$\lambda_2 = 2$带入$(\lambda I - A^T A)X = 0$，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0，\text{得特征向量} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，$$

12

将$\lambda_3=6$带入$(\lambda I-A^TA)X=0$，

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0\text{，得特征向量}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}，$$

单位化后分别为$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

取$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$，

正交变换$X=QY$，化二次型的标准型是$2y_2^2+4y_3^2$.

13

84

设A,B,C均为n阶矩阵，若$AB=C$，且B可逆，则____.

A.矩阵C的行向量组与矩阵A的行向量组等价；

B.矩阵C的列向量组与矩阵A的列向量组等价；

C.矩阵C的行向量组与矩阵B的行向量组等价；

D.矩阵C的列向量组与矩阵B的列向量组等价.

13

84

设A,B,C均为n阶矩阵，若$AB=C$，且B可逆，则___.

A.矩阵C的行向量组与矩阵A的行向量组等价；

B.矩阵C的列向量组与矩阵A的列向量组等价；

C.矩阵C的行向量组与矩阵B的行向量组等价；

D.矩阵C的列向量组与矩阵B的列向量组等价.

答案： $\underline{B}$

矩阵乘积AB的列向量为A的列向量的线性组合，行向量为B的行向量的线性组合. 所以，C的列向量组为A的列向量组的组合；而$A=CB^{-1}$，A的列向量组为C的列向量组的组合；

所以，C的列向量组与A的列向量组等价.

13

85

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件是____.

A.$a = 0, b = 2$；B.$a = 0$，b为任意数；

C.$a = 2, b = 0$；D.$a = 2$，b为任意数

13

85

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件是___.

A.$a=0,b=2$；B.$a=0$，b为任意数；

C.$a=2,b=0$；D.$a=2$，b为任意数

答案：$\underline{B}$.

相似矩阵有相同的特征值.

$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$的特征多项式$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$

13

有三个根$2, b, 0$，

$$\begin{vmatrix} 2-1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 2-1 \end{vmatrix} = 0，得a=0，$$

$$\begin{vmatrix} b-1 & 0 & -1 \\ 0 & b-b & 0 \\ -1 & 0 & b-1 \end{vmatrix} = 0，得b是任意数，$$

所以，$a=0$，b为任意数.

13

86

设$A=(a_{ij})$是3阶非零实方阵，$|A|$是A的行列式，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式.若$a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则$|A|=$___.

13

86

设$A=(a_{ij})$是3阶非零实方阵，$|A|$是A的行列式，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式.若$a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则$|A|=$____.

解答：$\underline{-1}$.

因为 $A^*=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{21} & -a_{31}\\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32}\\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33}\end{pmatrix}=-A^T$，

所以，$|A^*|=(-1)^3|A^T|=-|A|$，又因为，$AA^*=|A|I$，

且，$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2)\neq 0$，

所以，$|A^*|=|A|^2$，即，$|A|^2=-|A|$，$|A|^2+|A|=0$，

$|A|=-1.$

13

87

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a$，$b$为何值时，存在矩阵$C$，使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$.

13

87

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a$, b为何值时，存在矩阵C，使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵C.

解：设$C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，

则$AC-CA=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}$，

13

由$AC-CA=B$，得$\begin{cases} -x_2+ax_3 &= 0 \\ -ax_1+x_2+ax_4 &= 1 \\ x_1-x_3-x_4 &= 1 \\ x_2-ax_3 &= b \end{cases}$，

方程的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

有解$\Leftrightarrow a=-1,\ b=0.$

13

方程组的通解为
$$\begin{cases} x_1 &= 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 &= -x_3 \end{cases}，x_3, x_4\text{是自由未知量}.$$
所有的矩阵$C = \begin{pmatrix} 1 + x_3 + x_4 & -x_3 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，$x_3, x_4$是任意数.

13

88

设二次型$f=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，

记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(1)证明二次型f对应的矩阵是$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；(2)若$\alpha,\beta$正交且均为单位向量，证明$f$在正交变换下的标准型是$2y_1^2+y_2^2$.

13

88

设二次型$f=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，

记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(1)证明二次型f对应的矩阵是$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；(2)若$\alpha,\beta$正交且均为单位向量，证明$f$在正交变换下的标准型是$2y_1^2+y_2^2$.

(1)因为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)^T$是对称矩阵，且

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

13

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2.$$

所以，二次型的矩阵是$2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(2) 因为α, β正交，所以，方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & = 0 \end{cases}$$ 有单位解向量，

13

记作$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，则，

Q是正交矩阵，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$是正交变换，且

$$Q^T \left(2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right) Q$$

13

$$= Q^T\left(2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

13

$$= 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，正交变换$X = QY$化二次型为$2y_1^2 + y_2^2$.

14

89

行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = $____.

A.$(ad-bc)^2$；B.$-(ad-bc)^2$；C.$a^2d^2-b^2c^2$；D.$b^2c^2-a^2d^2$.

14

89

行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \underline{\quad\quad}$.

A.$(ad-bc)^2$； B.$-(ad-bc)^2$； C.$a^2d^2-b^2c^2$； D.$b^2c^2-a^2d^2$.

答案： $\underline{\;B\;}$.

利用行列式展开，直接计算即得.

14

90

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量，则对任意常数$k,l$，向量$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的

A.必要非充分条件；B.充分非必要条件；

C.充分必要条件；　　D.既非充分又非必要条件.

14

90

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是3维向量，则对任意常数$k, l$，向量$\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关的

A.必要非充分条件；B.充分非必要条件；

C.充分必要条件；　　D.既非充分又非必要条件.

答案：$\underline{A}$.

若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则对任意常数$k, l$，组合

$x_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + x_2(\alpha_2 + i\alpha_3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$，

即，可以得到$\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$线性无关；

但α_1, α_2线性无关且$\alpha_3 = 0$，对任意常数k, l，向量$\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 都线性无关，而$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$确线性相关.

14

91

设二次型$f=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是1，则$a$的取值范围____.

14

91

设二次型$f=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是1，则$a$的取值范围___.

答案：$\underline{[-2,\ 2]}$.

利用配方，$f=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$

令$\begin{cases} x_1+ax_3 & =y_1 \\ x_2-2x_3 & =y_2 \\ x_3 & =y_3 \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1 & =y_1-ay_3 \\ x_2 & =y_2+2y_3 \\ x_3 & =y_3 \end{cases}$，

化二次型为$f=y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2$.

负惯性指数为1，$4-a^2\geq 0,\ -2\leq a\leq 2$.

14

92

设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$I$是3阶单位矩阵.

(1)求方程组$AX=0$的基础解系;

(2)求满足$AB=I$的所有矩阵B.

14

92

设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$I$是3阶单位矩阵.

(1)求方程组$AX=0$的基础解系；

(2)求满足$AB=I$的所有矩阵B.

解：(1)对矩阵A实施初等行变换，

$$A\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

14

有基础解系$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2)构作3×7矩阵$(A\ \ I)$，并进行初等行变换

$$(A\ \ I) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

14

可以得到

$$AX=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\text{的通解}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix};$$

$$AX=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{的通解}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix};$$

14

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{的通解}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{全部的矩阵}B = \begin{pmatrix} 2-k & 6-l & -1-m \\ -1+2k & -3+2l & 1+2m \\ -1+3k & -3+3l & 1+3m \\ k & l & m \end{pmatrix},$$

其中，k, l, m是任意数.

14

93

证明：n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

14

93

证明：n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

证明：因为两个矩阵有相同特征值$\lambda_1 = 0(n-1$重$)$，$\lambda_2 = n$，且$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$属于特征值$\lambda_1 = 0$有$n-1$个线性无关的特征向量

14

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$属于特征值$\lambda_1 = 0$也有$n-1$个线性无关的特征向量

14

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以，它们相似于同一个对角阵 $\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$,

所以，它们相似.

15

94

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$AX=b$有无穷多解的充分必要条件是___.

A.$a\notin\Omega,d\notin\Omega$； B.$a\notin\Omega,d\in\Omega$；

C.$a\in\Omega,d\notin\Omega$； D.$a\in\Omega,d\in\Omega$.

15

94

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$AX=b$有无穷多解的充分必要条件是___.

A.$a\notin\Omega, d\notin\Omega$；B.$a\notin\Omega, d\in\Omega$；

C.$a\in\Omega, d\notin\Omega$；D.$a\in\Omega, d\in\Omega$.

答案： $\underline{D}$.

构作矩阵$(A\ \ b)$，并进行初等行变换，

15

$$(A\ \ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & b \\ 1 & 4 & a^2 & b^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & b^2-3b+2 \end{pmatrix}$$

$AX=b$有无穷多解$\Leftrightarrow a^2-3a+2=b^2-3b+2=0$,

解得：$a\in\Omega$且$b\in\Omega$.

15

95

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=PY$下的标准型是$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$.若$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2\end{pmatrix}$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=QY$下的标准型是___

A.$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$；B.$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$；C.$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$；D.$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

15

95

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=PY$下的标准型是$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$.若$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2\end{pmatrix}$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=QY$下的标准型是___

A.$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$；B.$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$；C.$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$；D.$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

答案：$\underline{A}$.

设二次型的矩阵为A，则$AP=P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，

即，$A\alpha_1=2\alpha_1$；$A\alpha_2=\alpha_2$；$A\alpha_3=-\alpha_3$.

15

所以，$AQ = Q\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二次型在正交变换$X = QY$下，化为$2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

15

所以，$AQ = Q\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二次型在正交变换$X = QY$下，化为$2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

96

n阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = ____.$

15

答案： $\underline{2^{n+1}-2}$.

从最后一行开始，下一行乘2加到上一行，行列式的值不变，

$$原行列式=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

再按第一行展开，

$$=(-1)^{n+1}(2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2^{n+1}-2.$$

15

97

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是3维向量空间$F^3$的一个基,

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(1)证明向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$F^3$的一个基;

(2)当k为何值时，存在非零向量ξ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标相同，并求出所有的$\xi$.

15

97

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是3维向量空间$F^3$的一个基，

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(1)证明向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$是$F^3$的一个基；

(2)当k为何值时，存在非零向量ξ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标相同，并求出所有的$\xi$.

(1)证明 因为

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = (2x_1 + x_3)\alpha_1 + 2x_2\alpha_2 + [2kx_1 + (k+1)x_3]\alpha_3,$$

且$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以，$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$

15

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_2 & = 0 \\ 2kx_1 + (k+1)x_3 & = 0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 4$，

方程组只有零解.所以，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关，是$F^3$的基.

(2)设ξ在两个基下的共同坐标是$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，即，

15

$$\xi=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

而，$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$，

所以，

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

15

再由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

即，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$有非零解. 得，$k = 0$.

方程组有通解$\left\{ \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数.} \right\}$.

所有的ξ构成的集合：$\{\xi|\xi = -k\alpha_1 + k\alpha_3, k \neq 0\}$.

15

98

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$相似于矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(1)求a,b的值.(2)求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

15

98

设矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$相似于矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(1)求a,b的值.(2)求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

解 (1)因为矩阵B有二重特征值$\lambda_1=1$和特征值$\lambda_2=b$，且属于二重特征值$\lambda_1=1$有两个线性无关的特征向量，

又因为A与B相似，所以矩阵A也有二重特征值$\lambda_1=1$和特征值$\lambda_2=b$，且属于二重特征值$\lambda_1=1$有两个线性无关的特征向量，

15

所以，$\begin{pmatrix} \lambda & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，

在$\lambda=1$时的有两个线性无关的解.

得：$a=4$.

矩阵A的行列式$|A|=5$，所以，$|B|=b=5$.

(2)将$\lambda_1=1$带入$(\lambda I-A)X=0$，得属于特征值$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

15

将$\lambda_2=5$带入$(\lambda I-A)X=0$，得属于特征值$\lambda_2=5$的线性无关的特征向量：

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

取$P=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

15

99

设3阶矩阵A的特征值为2，-2，1，$B = A^2 - A + I$，其中I是3阶单位矩阵，则B的行列式$|B| =$ ___.

15

99

设3阶矩阵A的特征值为2，-2，1，$B=A^2-A+I$，其中I是3阶单位矩阵，则B的行列式$|B|=$___.

答案： $\underline{\ 21\ }$.

因为，A有3个不同特征值$2,-2,1$，所以存在可逆矩阵P，使

得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以，

$$P^{-1}BP=P^{-1}(A^2-A+I)P=(P^{-1}AP)^2-(P^{-1}AP)+I$$

15

$$
= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

所以，$|B| = |P^{-1}BP| = 21.$

15

100

设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且$A^3=0$.

(1)求a的值；(2)若矩阵X满足$X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中I是3阶单位矩阵，求X.

15

100

设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且$A^3=0$.

(1)求a的值；(2)若矩阵X满足$X-XA^2-AX+AXA^2=I$，其中I是3阶单位矩阵，求X.

解 (1)因为$A^3=0$，所以$|A|=0$，即，$|A|=a^3=0$，$a=0$.

(2)因为

$$X-XA^2-AX+AXA^2=X(I-A^2)-AX(I-A^2)$$
$$=(X-AX)(I-A^2)=(I-A)X(I-A^2)$$

15

所以，$(I-A)X(I-A^2)=I$，又因为，

$$I-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\ I-A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\ (I-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$X=(I-A)^{-1}(I-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

16

101

设A, B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是$\underline{\ C\ }$.

A.A^T与B^T相似；　B.A^{-1}与B^{-1}相似；

C.$A+A^T$与$B+B^T$相似；D.$A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似；

16

101

设A,B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是$\underline{\ C\ }$.

A.A^T与B^T相似；　B.A^{-1}与B^{-1}相似；

C.$A+A^T$与$B+B^T$相似；D.$A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似；

解答 $\underline{\quad\quad}$.

A与B相似$\Leftrightarrow$存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$；

所以，$(P^{-1}AP)^T=B^T$，$(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1}$，即，

$P^TA^T(P^{-1})^T=[(P^{-1})^T]^{-1}A^T(P^{-1})^T=B^T$，

$(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，

$P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1}$，

16

所以，A.，B.，D.，均成立.

C.不成立的反例.

设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$相似，

$$A+A^T=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix},\quad B+B^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix},$$

$|A+A^T|=7$，$|B+B^T|=8$，

行列式不等，一定不相似.

16

102

行列式$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$

16

102

行列式$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad}$.

解答 $\underline{\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

16

$$
= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.
$$

16

103

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$.

当a为何值时，方程$AX=B$无解、有唯一解、有无穷多解？有解时，求解此方程.

16

103

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$.
当a为何值时，方程$AX=B$无解、有唯一解、有无穷多解？有解时，求解此方程.

解 构作矩阵$(A\ \ B)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，化为阶梯形，方程$AX=B$有解$\Leftrightarrow$后两列没有主元.

16

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

当$a \neq -2$且$a \neq 1$时，矩阵A可逆，方程$AX = B$有唯一解.

进一步将$(A \ \ B)$化为规范阶梯形

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当$a = -2$时，$(A \ \ B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$，

16

最后两列中出现了主元，方程$AX=B$无解.

当$a=1$时，$(A\ \ B)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$AX=B$有无穷多解. 将X进行列分块，记$X=(X_1\ \ X_2)$，

则$AX_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $AX_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

即，解矩阵X的列向量是线性方程组$AX=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$的解向量.

16

$AX=0$有基础解系$\xi=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，

$AX=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$有一个解$\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

所以，$AX=B$的一般解为$X=\begin{pmatrix}1&1\\-1-k&-1-l\\k&l\end{pmatrix}$，

其中，k,l是任意数.

16

104

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

(1)求A^{99}；

(2)设3阶矩阵$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$满足$B^2=BA$.

记$B^{100}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}$，将$\beta_1,\beta_2,\beta_3$分别表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

16

104

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

(1)求A^{99}；

(2)设3阶矩阵$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$满足$B^2=BA$.

记$B^{100}=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}$，将$\beta_1,\beta_2,\beta_3$分别表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

解 (1)A的特征多项式$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$，

3阶矩阵A有3个不同特征值$\lambda_1=0;\lambda_2=-1;\lambda_3=-2$，一定相似于对角阵.

16

求矩阵A属于特征值$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = -2$的特征向量，分别得$\eta_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，

取$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，

$$A^{99} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{99} P^{-1}$$

16

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2^{98}-2 \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2^{99}-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16

$$=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&2\\-1&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2^{98}-2\\2^{100}-2&1-2^{100}&2^{99}-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2)因为$B^2=BA$，所以，

$$B^{100}=B^{98}B^2=B^{98}BA=B^{97}B^2A=B^{97}BA^2$$

$$=B^{96}B^2A^2=B^{96}BA^3=\cdots=BA^{99}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2^{98}-2\\2^{100}-2&1-2^{100}&2^{99}-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

16

$$\begin{cases} \beta_1 = (2^{99} - 2)\alpha_1 + (2^{100} - 2)\alpha_2 \\ \beta_2 = (1 - 2^{99})\alpha_1 + (1 - 2^{100})\alpha_2 \\ \beta_3 = (2^{98} - 2)\alpha_1 + (2^{99} - 2)\alpha_2 \end{cases}.$$

16

$$\begin{cases} \beta_1 = (2^{99}-2)\alpha_1 + (2^{100}-2)\alpha_2 \\ \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2 \\ \beta_3 = (2^{98}-2)\alpha_1 + (2^{99}-2)\alpha_2 \end{cases}.$$

105

设二次型$f = a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的正、负惯性指数分别为1,2，则___.

A.$a>1$；B.$a<-2$；C.$-2<a<1$；D.$a=1$或$a=-2$.

16

$$\begin{cases} \beta_1 = (2^{99}-2)\alpha_1 + (2^{100}-2)\alpha_2 \\ \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2 \\ \beta_3 = (2^{98}-2)\alpha_1 + (2^{99}-2)\alpha_2 \end{cases}.$$

105

设二次型$f = a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$的正、负惯性指数分别为1,2，则___.

A.$a>1$；B.$a<-2$；C.$-2<a<1$；D.$a=1$或$a=-2$.

答案： $\underline{C}$.

因为二次型的矩阵$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，

16

有特征值$\lambda_1 = a + 2$，$\lambda_2 = \lambda_3 = a - 1$.

f的正惯性指数为1，负惯性指数为2；所以，

$a + 2 > 0$且$a - 1 < 0$，即，$-2 < a < 1$.

16

有特征值$\lambda_1 = a+2$，$\lambda_2 = \lambda_3 = a-1$.

f的正惯性指数为1，负惯性指数为2；所以，

$a+2>0$且$a-1<0$，即，$-2<a<1$.

106

设矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$等价，则$a=$____.

16

有特征值$\lambda_1 = a+2$，$\lambda_2 = \lambda_3 = a-1$.

f的正惯性指数为1，负惯性指数为2；所以，

$a+2>0$且$a-1<0$，即，$-2<a<1$.

106

设矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$等价，则$a=$____.

答案：<u>2</u>.

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，秩为2，

16

矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}$,

秩=2$\Leftrightarrow a = 2$.

16

矩阵$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}$，

秩=2$\Leftrightarrow a=2$.

107

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$，且方程组$AX=\beta$无解.

(1)求a的值；(2)求方程组$A^TAX=A^T\beta$的通解.

16

解 (1)方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{pmatrix}$，

初等行变换，化其为阶梯形

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & 1 & 1-2a & -1\\ 0 & 0 & 2a-a^2 & a-2\end{pmatrix},$$

方程$AX=\beta$无解$\Leftrightarrow 2a-a^2=0, a-2\neq 0$，得，$a=0.$

(2)$a=0$时，$A^TA=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，$A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，

16

方程$A^AX = A^T\beta$的增广矩阵$\overline{A^TA} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

初等行变换化为阶梯形$\overline{A^TA} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^TAX = 0$有基础解系$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^TAX = A^T\beta$有解$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

通解为$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k为任意数.

17

108

设α是n维列向量，I是n阶单位矩阵，则____.

A.$I-\alpha\alpha^T$不可逆；　B.$I+\alpha\alpha^T$不可逆；

C.$I-2\alpha\alpha^T$不可逆；　D.$I+2\alpha\alpha^T$不可逆.

17

108

设α是n维列向量，I是n阶单位矩阵，则___.

A.$I-\alpha\alpha^T$不可逆；　B.$I+\alpha\alpha^T$不可逆；

C.$I-2\alpha\alpha^T$不可逆；　D.$I+2\alpha\alpha^T$不可逆.

答案： $\underline{A}$.

由于$(I-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha(\alpha^T\alpha)=0$，$\alpha$是$(I-\alpha\alpha^T)X=0$的非零解，$r(I-\alpha\alpha^T)<n$，$I-\alpha\alpha^T$不可逆.

一般的，若$(I+b\alpha\alpha^T)X=0$，两边同时左乘α^T，得

$(\alpha^T+b\alpha^T\alpha\alpha^T)X=0$，$(1+b)\alpha^TX=0$，

若$b\neq-1$，则$\alpha^TX=0$，即，$(I+b\alpha\alpha^T)X=0\Rightarrow X=0$，

$(I+b\alpha\alpha^T)X=0$只有零解，$I+b\alpha\alpha^T$可逆.

17

109

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

则____.

A.A与C相似，B与C相似；　B.A与C相似，B与C不相似；

C.A与C不相似，B与C相似；D.A与C不相似，B与C相似.

17

109

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

则____.

A.A与C相似，B与C相似；　B.A与C相似，B与C不相似；

C.A与C不相似，B与C相似；D.A与C不相似，B与C相似.

答案：$\underline{\ B\ }$.

三个矩阵有相同的特征值(特征多项式)，

但属于特征值$\lambda=2$的线性无关的特征向量个数不同，矩阵A有两个，矩阵B有一个，A可以对角化为C，B不能对角化为C

17

110

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为____.

17

110

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为___.

答案：$\underline{2}$.

以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$B$，

则B是可逆矩阵，且$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$是$AB$的列，

所以，$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩等于$AB$的秩，

又因为，B可逆，A与AB等价，所以，$r(AB)=r(A)=2$.

17

111

设3阶矩阵$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$有3个不同特征值，且$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(1)证明：$r(A) = 2$;

(2)若$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，求方程$AX = \beta$的通解.

111

设3阶矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$有3个不同特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.
(1)证明：$r(A)=2$；
(2)若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程$AX=\beta$的通解.

解 (1)因为，$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，所以，
$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0，\text{即，}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\text{是}A\text{属于0特征值}$$
的特征向量.

又因为A有3个不同特征值，A相似于对角阵，且A有一个0特征值，2个不同的非零特征值，所以，

17

A相似于$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，$ab \neq 0$，所以，$r(A) = 2$.

(2)因为$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，

即，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$AX = \beta$的一个解，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$是$AX = 0$的一个非零解，也是其基础解系，所以，通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}，k\text{是任意数}.$$

17

112

设二次型$f = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$在正交变换$X = QY$下的标准型为$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.

17

112

设二次型$f=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$X=QY$下的标准型为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.

解　二次型f的矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$，且由$f$的标准型，$r(A)\leq 2$，得：$a=2$.

A的特征多项式$\lambda I-A=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$，

A有3个不同特征值$\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$.

将特征值分别带入$(\lambda I-A)X=0$，求其特征向量，并单位化，

17

$$\lambda_1 = -3\text{的特征向量}\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}，\text{单位化得}\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}；$$

$$\lambda_2 = 0\text{的特征向量}\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{单位化得}\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}；$$

$$\lambda_3 = 6\text{的特征向量}\eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}，\text{单位化得}\xi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}；$$

17

所以，正交矩阵是$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

17

所以，正交矩阵是$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

113

设A为3阶方阵，$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$为可逆矩阵，使得

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$____.

A.$\alpha_1+\alpha_2$；B.$\alpha_2+2\alpha_3$；C.$\alpha_2+\alpha_3$；D.$\alpha_1+2\alpha_2$.

17

所以，正交矩阵是$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

113

设A为3阶方阵，$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$为可逆矩阵，使得

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$____.

A.$\alpha_1+\alpha_2$；B.$\alpha_2+2\alpha_3$；C.$\alpha_2+\alpha_3$；D.$\alpha_1+2\alpha_2$.

答案：$\underline{B}$.

17

因为$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，所以，

$A\alpha_1 = 0 \cdot \alpha_1,\ A\alpha_2 = 1 \cdot \alpha_2,\ A\alpha_3 = 2 \cdot \alpha_3$，

所以，$A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3.$

17

因为$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以，

$A\alpha_1=0\cdot\alpha_1$，$A\alpha_2=1\cdot\alpha_2$，$A\alpha_3=2\cdot\alpha_3$，

所以，$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$.

114

设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$的一个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则$a=$____.

17

答案：$\underline{-1}$.

因为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$是矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的一个特征向量，

所以，存在数k，满足$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

$k = 1$，$a = -1$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun

ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

EMAIL: Ning.qun@163.com